2.27 三角形的内角和究竟多少度

1809年，俄国数学家尼古拉·伊凡诺维奇·罗巴切夫斯基(Н.И.Лобачевский，1792～1856)在他的名著《几何学》中证明了一系列重要定理，在证明这些定理时，他没有用到欧几里得几何的第五公设(又名平行线公理)。而这些思想，他早在1826年就在喀山大学数学物理系报告过，罗氏的一个惊天动地的公理是：

内角和小于 π 的三角形存在!

命题1 三角形的内角和不超过两个直角。

事实上，若$\triangle ABC$的内角和等于$\pi+\alpha$，$\alpha>0$，下面用反证法找矛盾。设BC是最短边，D是BC中点，作射线AD，在$\triangle ABC$外取射线AD上线段$DE=AD$，连接EC，见图2-85。$\triangle ABD\cong\triangle CDE$，于是$\angle ABD=\angle DCE$，$\angle BAD=\angle DEC$，故$\triangle ACE$之内角和亦为$\pi+\alpha$，且$\angle BAC=\angle EAC+\angle AEC$，由抽屉原理，$\angle EAC$与$\angle AEC$中，至少一个不大于$\triangle ABC$中最小角$\angle BAC$之半，另一个也小于$\angle BAC$。如此继续取$\triangle AEC$最短边中点，作一个与$\triangle AEC$性质一致的三角形，它的内角和为$\pi+\alpha$，有两个角都小于$\triangle AEC$的最小角，且其中至少一个角小于$\triangle AEC$最小角之半。可见，在这种造新三角形的过程中，会出现一个三角形，内角和为$\pi+\alpha$，其中一内角不大于

π，另两个内角都小于$\frac{1}{2}\alpha$，于是其内角和小于 $\pi+\alpha$，矛盾。

命题 2 若存在一个内角和为 π 的三角形，则一切三角形内角和皆为 π。

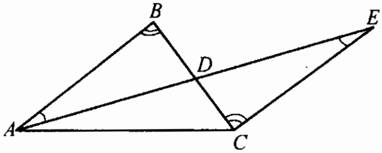

图 2-85

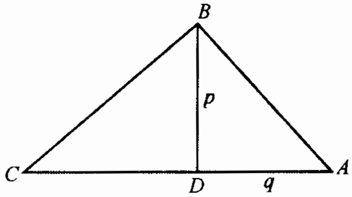

图 2-86

假设△ABC 的内角和为 π，则△ABC 中至少有两个锐角，设∠A 与∠C 是锐角，从 B 点向 AC 作高 BD，在直角△ABD 与△BCD 中，内角和皆为 π，不然，由于这两个三角形的内角总和为 2π，则会出现一个三角形的内角和大于 π 的现象，与命题 1 相违，至此得到一个内角和为 π 的直角三角形△BAD，见图2-86，$BD=p$，$DA=q$。以 AB 为公共边，画出两个全等三角形△BAD 和△BAD'，见图 2-87，$\angle 1+\angle 2=90°$，即四边形 $BDAD'$中，对边相等，对角皆直角。用四边形 $BDAD'$ 为基本原料，铺成 n 层 m 列的大四边形 $BMNQ$，如图 2-88，连接 MQ，则△BMQ≌△MQN。于是$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，又$\angle 3+\angle 5=\angle 4+\angle 6=90°$，故$\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$，由命题 1，$\angle 4+\angle 5\leqslant 90°$，$\angle 3+\angle 6\leqslant 90°$，两式中的不等号皆不能成立，于是△$BMQ$ 的内角和为 180°，即当一个三角形内角和为 180°时，可以找到一个直角边的长分别为 np 与 mq 的直角三角形，其内角和为 180°，其中 m，n 是任意正整数。

下面再证明，若存在一个三角形，内角和为 180°，则每个直角三角形，其内角和皆 180°。

事实上，对于任取的一个直角三角形△$A'B'C'$，当 m，n 足够大时，可以把△$A'B'C'$与△BMQ 的直角重合如图 2-89，使 A'落在 BQ

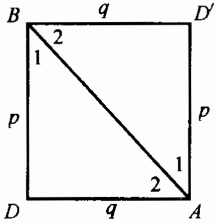

图 2-87

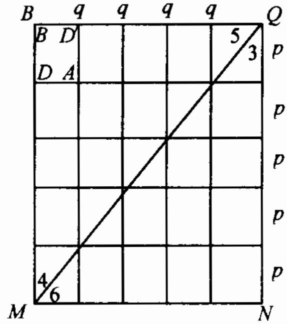

图 2-88

内，C'落在 BM 内，连接 $A'M$，直角三角形$\triangle A'MB$ 内角和为 180°。事实上，由于$\angle BQM+\angle A'MQ+\angle A'MB=90°$，$\angle BA'M+\angle MA'Q=180°$，若$\angle BA'M+\angle A'MB<90°$，则

$$\angle BQM+\angle A'MQ+\angle MA'Q>180°$$

即$\triangle A'QM$ 的内角和大于 180°，由命题 1，这是不可能的，所以$\angle BA'M+\angle A'MB\geqslant 90°$，进而$\triangle A'MB$ 的内角和$\geqslant$180°，由命题 1，只能是等号成立，即直角三角形$\triangle A'MB$ 的内角和为 180°；同理，$\triangle A'B'C'$的内角和也是 180°。

考虑任一三角形$\triangle A''B''C''$，设$\angle C''$是最大的内角，做高$C''D''$，见图2-90，由上述论述，当$\triangle ABC$的内角和为180°时，$\triangle A''C''D''$与

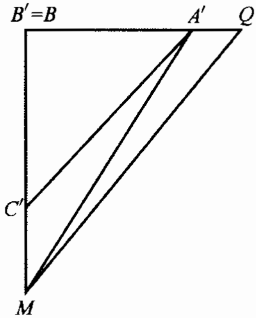

图 2-89

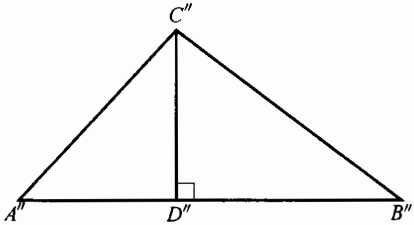

图 2-90

$\triangle B''C''D''$的内角和皆 180°,即$\angle C''A''D''+\angle A''C''D''+\angle C''D''A''+\angle C''D''B''+\angle D''C''B''+\angle C''B''D''=360°$,而$\angle A''D''C''+\angle C''D''B''=180°$,所以$\triangle A''B''C''$的内角和是 180°。

从命题 1,2 知下面两个结论成立:

命题 3 只有两种假定是可能的:或者所有的三角形内角和皆为 π,或者所有的三角形内角和都小于 π。

命题 4 如果所有的三角形内角和都相等,则它们的内角和都是 π。

事实上,若所有三角形的内角和为 φ,在任意取定的三角形$\triangle ABC$中,D 是AC 边上一点,连接 BD,如图 2-91,则

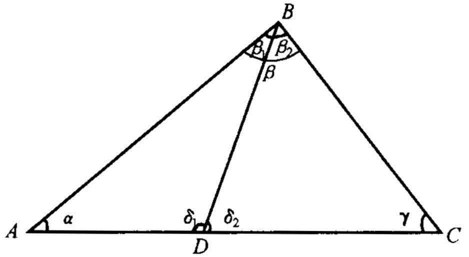

图 2-91

$$\varphi=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\varphi=\alpha+\beta_1+\delta_1$$

$$\varphi=\gamma+\delta_2+\beta_2$$

$$\begin{aligned}2\varphi&=\alpha+(\beta_1+\beta_2)+\gamma+(\delta_1+\delta_2)\\&=\alpha+\beta+\gamma+\pi\end{aligned}$$

从而 $\varphi=\pi$。

命题 5 若所有的三角形内角和小于 π,那么在所有三角形中,其内角和不统一。

命题 6 若 A 是直线a 外一点,过 A 存在唯一的一条与a 平行的直线的充分必要条件是任何三角形内角和为π。

事实上，在中学平面几何当中，按欧几里得的五条公设已证明出上述的必要性。下证充分性，即若任三角形内角和为 π，则过 A 只有一条与 a 平行的直线。作 $AB \perp a$，$AD \perp AB$，见图2-92。则 $AD \parallel a$。若直线 $AC \parallel a$，设 $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$，在直线 a 上取一点 B' 使得 $\angle AB'B = \alpha < \varepsilon$，且使 B' 与 $\angle BAC$ 在 AB 的同一侧。由已知，$\triangle ABB'$ 的内角和为 π，于是

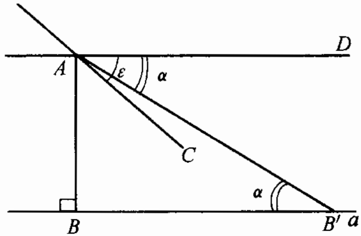

图 2-92

$$\angle BAB' = \frac{\pi}{2} - \alpha > \angle CAB = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

即直线 AC 过 $\triangle ABB'$ 内部，与 BB' 交于一点，即 AC 与 a 相交，与 $AC \parallel a$ 矛盾。

命题 7　三角形内角和小于 π 的充分必要条件是过直线 a 外一点 A 可以引至少两条与 a 平行的直线。

通过上述分析，我们看到，一旦存在一个三角形，它的内角和小于 π，则过直线外一点可引不止一条直线与原来那条直线平行，这当然与我们已经笃信无疑的一般平面几何理论相对立。难道可以允许谈三角形内角和小于 π 吗？允许。