1.4 整数见闻

(1) 完全数

6 这个数人人喜欢，它代表吉祥如意，神话上说至高无上的宇宙之神在六天之内创造万物，第七天休息，从此有一周七天，星期日休息的作息制。从数学上看，6 有三个数能除尽它：1, 2, 3, $1+2+3$ 恰为 6。称一个自然数为完全数，如果它的全体因数(含 1 不含该数本身)之和恰等于这个数。例如

$$28 = 1+2+4+7+14$$

28 是第二个完全数。完全数和完美无缺的人一样是十分罕见的。从欧几里得开始起，几千年的研究仍然没有搞清楚有没有奇数完全数。到 1996

年,人们具体写出了 34 个完全数,例如 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128 等。后面的完全数都非常之大。例如,1936 年美国联合通讯社播发了一条令外行人瞠目结舌的新闻,《纽约先驱论坛报》报道说:“S. I·克利格(Kireger)博士发现了一个 155 位的完全数 $2^{256}(2^{257}-1)$,该数是:26815615859885194199148049996411692254958731641184786755447122887443528060146978161514511280138383284395055028465118831722842125059853682308859384882528256。这位博士说,为了证明它确为完全数,足足奋斗了五年之久。”这位博士也真够孤陋寡闻和盲目行事的了。实际上两千多年前,欧几里得已经告诉大家 $2^{n-1}(2^n-1)$是完全数,其中 n 是正整数,后经欧拉严格证明,欧几里得公式是正确的。数学家应当当心,自己发现的可能是块“旧大陆”,并非什么新成就。

(2) 亲和数

220 的约数是

$$1,2,5,11,4,10,22,20,44,55,110$$

284 的约数是

$$1,2,71,4,142$$

220 的约数之和为

$$1+2+5+11+4+10+22+20+44+55+110=284$$

284 的约数之和为

$$1+2+71+4+142=220$$

这里甲数约数之和等于乙数,乙数约数之和等于甲数,这样的甲乙两数称为亲和数,这两个数虽不是完全数,但交替后则两全其美,正如毕达哥拉斯所言:“朋友即另一自我,犹如 220 与 284 一样。”

在 A.H·贝勒著,谈祥柏译的《数论妙趣》一书中给出了一个 28 节的亲和圈

$$v_1 v_2 v_3 \cdots v_{27} v_{28} v_1$$

其中

$v_1=14316,\quad v_2=19116,\quad v_3=31704,\quad v_4=47616,$

$v_5=83328,\quad v_6=177792,\quad v_7=295488,\quad v_8=629072,$

$v_9=589786,\quad v_{10}=294896,\quad v_{11}=358336,\quad v_{12}=418904,$

$v_{13}=366556,\quad v_{14}=274924,\quad v_{15}=275444,\quad v_{16}=243760,$

$v_{17}=376736,\quad v_{18}=381028,\quad v_{19}=285778,\quad v_{20}=152990,$

$v_{21}=122410,\quad v_{22}=97946,\quad v_{23}=48976,\quad v_{24}=45946,$

$v_{25}=22976,\quad v_{26}=22744,\quad v_{27}=19916,\quad v_{28}=17716$

我们仍约定,自然数的因数中含 1 不含该自然数本身,则 v_1 因数之和等于 v_2, v_2 因数之和等于 v_3, $\cdots$, v_{28}因数之和等于 v_1,这是一种周期为 28 的一个循环亲和圈,28 也是一个好数,它是第二个完全数。

(3) 勾股数

我国数学名著《周髀算经》中载有名句:“句(勾的古写)广三,股修四,径隅五。”说的是勾三股四弦五,即 3, 4, 5 是一个直角三角形三边之长,它们满足方程 $x^2+y^2=z^2$,称满足此方程的三个正整数为勾股数。公元 263 年,刘徽给出四组勾股数{5, 12, 13}, {8, 15, 17}, {7, 24, 25}, {20, 21, 29}。

$$x=k(m^2-n^2),\quad y=2kmn,\quad z=k(m^2+n^2)$$

是勾股数,其中 k, m, n 是正整数, $m>n$。事实上, $x^2=k^2(m^4+n^4-2m^2n^2)$, $y^2=4k^2m^2n^2$,则有

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=k^2[m^4+n^4-2m^2n^2+4m^2n^2]\\&=k^2[m^4+n^4+2m^2n^2]\\&=k^2(m^2+n^2)^2=z^2\end{aligned}$$

所以$\{x, y, z\}$是勾股数。

容易证明,每组勾股数皆可表成这种形式。

勾三股四弦五提示我们想到这样的问题：直角三角形的三条边长是连续整数的除了$\{3,4,5\}$之外还有吗？直角边是连续整数的情形有哪些？

若 $x=m^2-n^2, y=x+1=2mn, z=x+2=m^2+n^2$

是勾股弦，则求得 $m^2=x+1, n^2=1$，于是 $2mn=m^2, 2n=m=2$，因此 $x=3, y=4, z=5$，可见勾股数是连续整数的情况唯有$\{3,4,5\}$。

但是，勾股数$\{x,y,z\}$中，$|x-y|=1$ 的情形则有无穷多种，例如

$\{3,4,5\}$，$\{20,21,29\}$，$\{119,120,169\}$，$\{696,697,985\}$，$\{4059,4060,5741\}$，$\{23660,23661,33461\}$，$\{137903,137904,195025\}$，$\{803760,803761,1113689\}$，$\{4684659,4684660,6625109\}$，$\{27304196,27304197,38613965\}$，等等。

按三角形最短直角边大小排序第 100 个$|x-y|=1$ 的勾股数为$\{x,y,z\}$

$\{21669693148613788330547979729286307164015202768699465346081691992338845992696, x+1, 30645573943232956180057972969833245887630954508753693529117371074705767728665\}$

x 与 y 如此之大，仅仅相差 1，其比值几乎是 1，可见相应的直角三角形和等腰直角三角形已经十分相似了。

上面考虑的是方程 $x^2+y^2=z^2$ 的正整数解。这使我们自然想到 $x^n+y^n=z^n$ 的正整数解，其中 $n>2$. 1673 年法国数学家费马提出如下猜想：

当 $n>2$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 无正整数解。费马(P. Fermat, 1601～1665)在古希腊数学家丢番图(Diophatus, 公元前 1～3 世纪人)《算术》一书的空白处写道："把任何高于 2 次的幂分成两个同次幂是不可能的，对此，我已找到一个巧妙的证明，但此处纸边太窄，无法写

出。"后人称此猜想为费马大定理。费马去世后，后人整理他的遗稿时，只找到了 $n=4$ 情形的证明。人们对费马在《算术》上写的话是否是谎言，莫衷一是。

后来，欧拉对 $n=3$ 证明了费马猜想。19 世纪，法国科学院悬赏征解费马大定理，大数学家勒让德(Legendre)和狄利克雷(Dirichlet)证明了 $n=5$ 的情形，费马大定理成立；雷蒙(Lame)和狄利克雷又证明了 $n=7$ 的情形，费马大定理成立；到 20 世纪 70 年代，已经把使费马大定理成立的指数 n 证明到 10 万以上。在冲击费马大定理的历史上，有两个大数学家在它面前跌过跤，出过丑，一个是为微积分的严格化建功立业的数学家柯西(Cauchy)，他向法国科学院提交了证明费马大定理的论文，几周后他自己觉得证明不成功又要回了自己的文章；一个是日本数学家功岗，他在 20 世纪 70 年代宣称证明了费马大定理，世界各大通讯社都正式报道了这一消息，日本乃至全世界都为之轰动。但他的论文的归宿与柯西的何其相似，也是几周之后，功岗自己收回了那篇错误的证明文章。

1993 年 6 月，在英国剑桥牛顿数学研究所的一个讨论班上，美国普林斯顿大学的怀尔斯(A. Wiles)做了三场演讲，他最后宣布证明了费马大定理，而且还进一步证明 $x^n+y^n=z^n(n\geqslant3)$没有非零有理数解。第二天，《纽约时报》头版头条报道了这一轰动全球科学界的消息，配发了费马的照片，怀尔斯与克林顿、戴安娜一起列入 1993 年最令人敬仰的人物之一。戏剧性的情节又发生了，6 个月之后，怀尔斯发出电子邮件，承认了自己的证明中有漏洞。值得庆幸的是，这一次怀尔斯没有像柯西和功岗那样栽跟斗。1994 年 10 月 25 日，INT 网上传出喜讯，怀尔斯的关于费马大定理的证明文章已修正定稿，该定理被彻底证明，它是 20 世纪最出色的科学成就之一。

怀尔斯的文章长达 200 多页，是他单枪匹马进行了 7 年艰苦研究的结晶。怀尔斯是一个"为数学而数学"的忠实信仰者，他声称：

“我肯定不希望看见数学沦为应用的仆人，因为这甚至不符合应用自身的利益；费马大定理本身不可能有什么用途。”《科学》（中文版，1994，第2期）豪根（Horgan）著文问道：“费马大定理的证明是不是一种正在消逝的文化的最后挣扎呢？”怀尔斯“是一位杰出的遗老吗？”他说：“怀尔斯避开了计算机和应用及其他种种令他讨厌的东西，但是，将来怀尔斯式的人物会越来越少。”看起来，对纯数学中的古典疑难问题的研究以及为之处心积虑手写超长证明已经厌倦的数学家确实大有人在。数学家瑟斯顿（Thurston）说得更难听：“把数学在原则上简化为形式证明是20世纪所特有的一个不可靠的念头，高度形式化的证明比那些借助更直观的证明更有可能出毛病，”“集论是建立在有礼貌的谎言的基础之上的。我们赞同这些谎言，即使我们知道它不是真的。数学的基础在某些方面有点不现实的味道。”贝尔实验室的科学家格拉哈姆（R. L. Graham）说：“背离传统的证明的潮流或许是不可避免的。单靠人的思维无法证明的东西是一片汪洋大海，与这片大海比起来，你能够证明的东西，或许只是些孤零零的小岛，一些例外情况而已。”本书作者对豪根，瑟斯顿和格拉哈姆的观点并非抱完全否定的态度。