2.24 立方装箱与正方装箱问题

对于每个长方形箱子,问能否用有限个体积两两不等的立方块装满此箱子?

这个问题的回答是否定的,即不管用什么样的有限个两两体积相异的小立方体装填此箱,总会有空隙。

事实上,若能用这种有限个小立方体装满此箱,则箱底那一层小立方块中的最小者不会靠着箱子的侧面,见图 2-74,图2-75;若最小立方块 A 靠着箱子的侧面,则其外侧的 B 处必然要用比A 小的立方块来装填,这与 A 是底层中的最小立方块矛盾。于是第一层小立方

体中最小立方体 A 的上方形成一个凹洞，压在 A 的顶上的那些小立方体中的最小者必不与凹洞侧边接触。于是出现在凹洞的中间部位必有一个比 A 更小的立方体 B，在 B 的上方形成凹洞，依此递推，会出现一串无穷个越来越小的立方体装在箱内，与装入的立方体有限矛盾。至此知用有限个相异的小立方体来装长方箱子是装不满的，不管这只箱子的长、宽、高是多少。

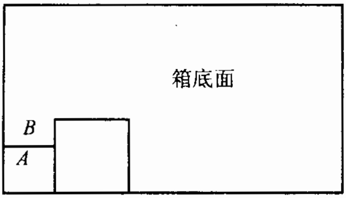

图 2-74

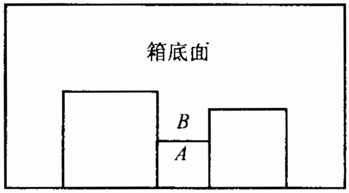

图 2-75

但对于二维情形，答案可以是肯定的。相应的，问题变成：把给定矩形划分成若干两两不相等的正方形。

1936 年，剑桥大学的布鲁克斯(Brooks)、史密斯(Smith)、斯通(Stone)和塔特(Tutte)给出下面两种实例，把 33×32 的矩形和 177×176 的矩形划成若干两两不等的正方形，见图 2-76，图 2-77，正方形内写的是其边长。

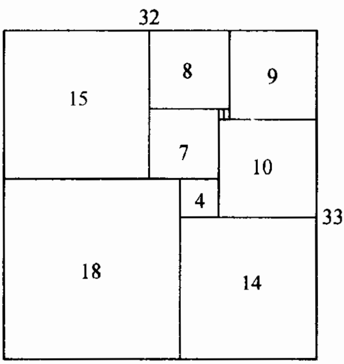

图 2-76

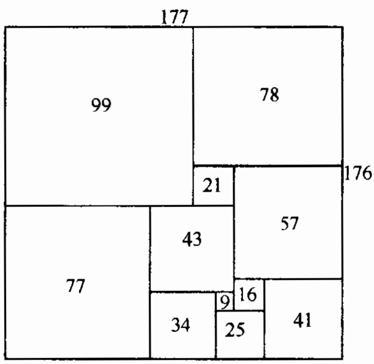

图 2-77

如果欲划分一个正方形成若干不等的小正方形，问题更困难一些。英国数学家威尔科克斯(Willcocks)发现了把 175×175 的正方形划分成 24 个相异的小正方形的结果，见图 2-78。

1964 年，滑铁卢大学的威尔逊(Wilson)博士(塔特的学生)用计算机找到了把 503×503 的正方形划分成 25 个两两互异的小正方形的结果，见图 2-79。

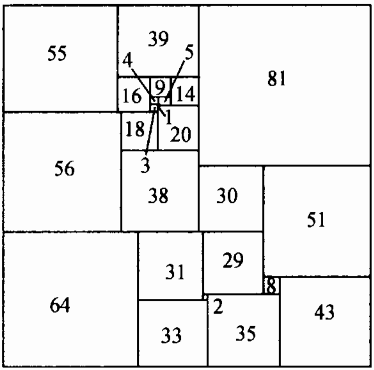

图 2-78

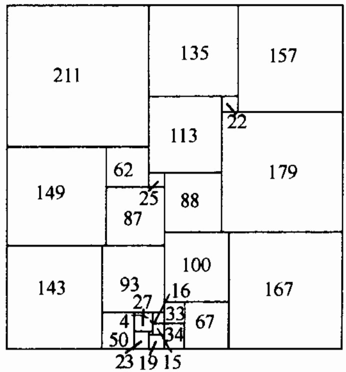

图 2-79

用计算机已经证实不可能把任何正方形划分成少于 20 个不同的小正方形，且这些小正方形中无排列组合成矩形的现象。

但对任意给定的正方形或矩形，把它划分成个数最少的不同的正方形，仍然是数学上有待进一步研究的课题。