2.23 捆绑立方体

有一玻璃制成的立方体,如果用橡皮筋来捆绑,若把橡皮筋套在一个顶点近旁,使此橡皮筋成一个三角形,见图 2-71, A 顶点近旁的三角形橡皮筋构成$\triangle EFG$,只要一松手,则$\triangle EFG$ 会向 A 方向滑过

去而脱落。而与此立方体底面垂直的平面截得的正方形 $MNPQ$ 若是一橡皮筋，将它弄成不与底面垂直，它仍然会凭它的“收缩成面积最小的特性”而恢复成一个与底面垂直的正方形，可见与底面垂直的正方形 $MNPQ$ 是稳定的捆绑。

上述这种垂直于底面的正方形橡皮筋共三族，每个面上有两族中的橡皮筋垂直地分布，立方体表面每个点上通过两条稳定（最牢靠）捆绑的橡皮筋。除此之外，是否还可能有牢靠捆绑的橡皮筋呢？有。

设立方体棱长为 1，考虑立方体表面上的六边形 $NOPKLM$，如图 2-72，这个六边形的六边分别在立方体的六个面上，设过两底上平行的对角线的平面与 NM，PK 分别交于 A，C 两点，连接 AC，连接 DE 与 GF 中点 O_1O_2，AC 与 O_1O_2 交于 B 点。设 $\angle CBO_2=\alpha$，若 $NOPKLM$ 是稳定的捆绑，则它的各边与所在的面上的一条对角线平行。于是

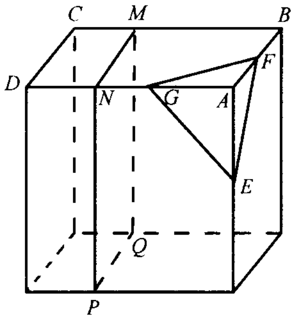

图 2-71

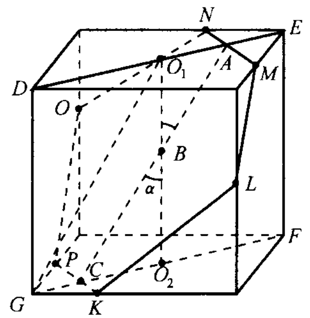

图 2-72

$$PK=\sqrt{2}-2BO_2\text{tg}\alpha$$

$$KL=BO_2\sqrt{1+2\text{tg}^2\alpha}=OP$$

$$MN=\sqrt{2}-2BO_1\text{tg}\alpha$$

$$LM=BO_1\sqrt{1+2\text{tg}^2\alpha}=ON$$

六边形 $NOPKLM$ 的周长为

$$F(\alpha)=2\sqrt{2}-2\mathrm{tg}\alpha+2\sqrt{1+2\mathrm{tg}^2\alpha}$$

当 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$F(\alpha)$最小，这时 α 恰为$\angle CBO_2$，可见有四族捆绑的六边形，每族六边形所在的平面互相平行，且与立方体的一个侧面的对角线平行，这四族捆绑线使得立方体侧面每一点上恰有两条直线段通过，与前面的三族捆绑线合起来，共有七族捆绑线，立方体侧面上每一点都有四条捆绑线通过，即立方体表面上编织了四层捆绑线。

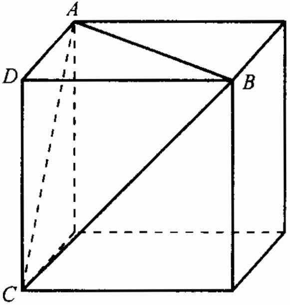

图 2-73

如果欲把棉纱绕在一个立方体上且不致使棉纱松脱，则应垂直于立方体的棱缠绕或如图 2-73 所示缠在以 D 为顶的三棱锥 $D-ABC$ 以外的表面上，每圈线与$\triangle ABC$ 的平面平行；共七种方式；用垂直于棱的方式(三种)缠了两层之后改用平行$\triangle ABC$ 等三角形的方式(四种)再缠两层，以后重复地(周期性)进行，缠绕成一个十分别致而结实的线团。