2.22 黄金矩形系列

设一矩形的长为 a，宽为 b，则当 a, b 满足

$$b^2 = a(a-b) \tag{2.13}$$

时，此矩形称为黄金矩形，这种矩形的长宽比例协调，使得它的形象显得十分得当，不胖不瘦，美观匀称，见图2-70。$OABC$ 是一个黄金矩形，从上面切去一个正方形 OA_1B_1C，剩下的矩形为 A_1ABB_1，其宽为 $AA_1 = a - b$，长为 b，由(2.13)得

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 = (a^2 - ab) - ab + b^2 \\ &= b^2 - ab + b^2 = 2b^2 - ab = b(2b - a) \\ &= b[b - (a-b)]\end{aligned}$$

即 A_1ABB_1 仍为黄金矩形，可见：

黄金矩形上剪一刀剪掉一个正方形，得到的矩形仍为黄金矩形，如此逐次剪掉正方形，会得到面积单调减少的一个黄金矩形的无穷序列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots \tag{2.14}$$

由(2.14)式得

$$b^2 + ab - a^2 = 0$$

$$b = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{5a^2})(\pm\text{号取}+\text{号})$$

$$b = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)a \tag{2.15}$$

即第二代黄金矩形的长是上一代黄金矩形长的$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$倍，$0<\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)<1$。记$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=q$，则黄金矩形序列的长组成的序列为

$$a, qa, q^2a, \cdots, q^na, \cdots$$

矩形之长趋于零，从而矩形之宽趋于零，S_n 的面积趋于零，若在图2-70中切割黄金矩形时，按“丢左”——“丢上”——“丢右”——“丢

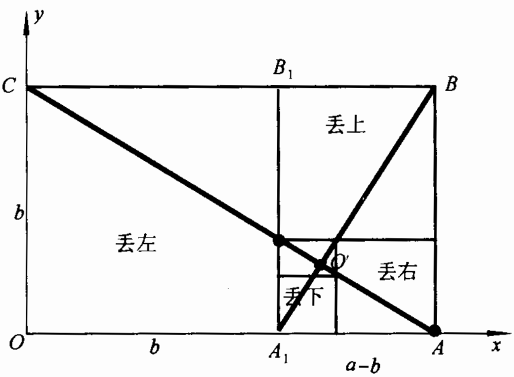

图 2-70

下"周期性地进行,最后趋于一点 O'。

下面确定 O' 点的坐标 (x_0, y_0)

$$x_0 = aq + aq^5 + aq^9 + \cdots = \frac{aq}{1-q^4}$$

其中 aq 是第一次丢掉的正方形边长,aq^5 是第五次丢掉的正方形的边长,等等。

$$y_0 = aq^4 + aq^8 + \cdots = \frac{aq^4}{1-q^4}$$

其中 aq^4 是第四次丢掉的正方形边长。aq^8 是第八次丢掉的正方形边长,等等。

于是得知矩形序列(2.14)趋于点 $O'\left(\frac{aq}{1-q^4}, \frac{aq^4}{1-q^4}\right)$,

考虑直线 AC 与 A_1B,其方程分别为

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \tag{2.16}$$

$$\frac{x-b}{a-b} = \frac{y-0}{b-0} \tag{2.17}$$

O' 点恰为直线(2.16)与(2.17)的交点。

在图 2-70 上看,点 O' 是按顺时针方向螺旋式地削去各代黄金矩形上的一端之正方形的极限点,有趣的是把这一极限过程反过来,则为从 O' 点按逆时针方向逐步培育出越来越大的黄金矩形,且随着这一逆时针过程的无限推进,黄金矩形会无限膨胀。我们似乎感悟到 O' 点似一种遗传物质繁衍着可爱的生物体。