2.21《几何原本》内容提要与点评

《几何原本》共13卷,其中的卷相当于今日数学著作中的章,书中共119个定义,5条公理,5条公设,465条命题,是数学史上第一个数学公理体系。有的版本设15卷,但不少数学家认为后两卷非欧几里得所著。

卷一是基本定义及公设公理。

含23个定义,5个公设,5个公理和48个命题。

定义1　点是没有部分的东西。

定义2　线有长度没有宽度。

定义3　线的两端是点。

定义4　直线是这样的线,它关于在其上所有的点的位置是相等的。

定义5　面只有长度和宽度。

定义6　面的边缘是线。

定义7　平面是这样的面,它关于在其上的所有直线的位置是相等的。

定义8　平面角是在一平面内但不在一直线上的两条相交直线的相互倾斜度。

定义9　当包含角的线是直线时,这个角叫做平角。

定义10　当一条直线竖直在另一条直线上使得相邻的角彼此相

等时,每一个相等的角是直角,竖立在另一条直线上的直线称为垂直于它所竖立的直线。

定义 11 钝角是大于直角的角。

定义 12 锐角是小于直角的角。

定义 13 边界是物体的尽头。

定义 14 图形是被一个或多个边界包围的。

定义 15 圆是由一条曲线包围的图形,从其中一点出发落在曲线上的所有线段彼此相等。

定义 16 (定义 15 中的)那个点叫做圆心。

定义 17 圆的直径是过圆心且在两个方向上止于圆周的任意线段;这样的线段将圆二等分。

定义 18 半圆是直径和由它截得的圆周所围成的图形,半圆的中心与圆心相同。

定义 19 直线形是由线段围成的。三边形是由三条线段围成的,四边形是由四条线段围成的,多边形是由多于四条线段围成的。

定义 20 在三边形中,等边三角形是三条边相等的,等腰三角形是只有两条边相等的,不等边三角形是三条边都不相等的。

定义 21 在三边形中,直角三角形有一个直角,钝角三角形有一个钝角,锐角三角形有三个锐角。

定义 22 在四边形中,正方形是各边相等且各角都是直角的;长方形是角为直角但边不全相等者;菱形是边相等但角不都是直角的;长菱形是对边和对角彼此相等但也不全相等且角不是直角的;除这些之外的四边形称作不规则四边形。

定义 23 平行直线是在同一平面内向两个方向无限延伸,而在两个方向上彼此不相交的直线。

公设 1 假定从任意一点到任意一点可作一条直线。

公设 2 一条有限直线可以不断延长。

公设 3　以任意中心和直径可以画圆。

公设 4　凡直角都相等。

公设 5　若一直线落在两直线上所构成的同旁内角之和小于两直角，那么把两直线无限延长，它们将在同旁内角和小于两直角的一侧相交。

公理 1　等于同量的量彼此相等。

公理 2　等量加等量和相等。

公理 3　等量减等量差相等。

公理 4　彼此重合的图形是全等的。

公理 5　整体大于部分。

在第一卷里，欧几里得证明了 48 个命题。

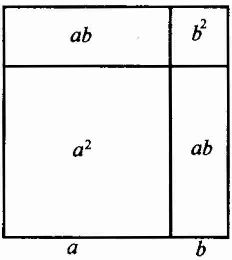

图 2-69

第二卷是 14 个代数恒等式的几何表述。例如$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的几何表述如图 2-69。

第三卷是关于圆周、弦、切线和与圆有关的角的定义和命题，定义 11 个，命题 37 个。

第四卷有 16 个命题，讲圆的内接与外切多边形及正五边形、正六边形与正十边形的做法。

第五卷由 18 个定义和 25 个命题组成，叙述与几何相关的算术问题，主要是与相似形有关的比与比例的概念与性质。

第六卷是相似形的理论，运用比例算术进行研究。本卷有 5 个定义和 33 个命题。

第七卷有 23 个定义和 39 个命题。

第八卷有 27 个命题，无定义。

第九卷有 36 个命题，无定义。

第七、八、九三卷讲的是整数理论，由于欧几里得用线段表示数，所以他把这些内容写入几何书中、著名的定理质数无限性就收入第

九卷中。

第十卷是欧氏著作中最难的部分，讲述可通约与不可通约的理论。讲出了二次与四次根式，但欧氏未发现无理数。这些根式与几何运算有关。本卷有 4 个定义和 115 个命题。

第十一、十二、十三卷基本上是关于立体几何内容的讲述。

第十一卷有 31 个定义和 40 个命题，主要内容有球、圆锥、圆柱和五个正多面体，以及空间的直线与直线、平面与平面、直线与平面的位置关系，还有平行六面体的等积问题。

第十二卷由 18 个命题组成，讨论棱柱与棱锥以及球体体积等内容。

第十三卷由 18 个命题组成，主要讨论正多面体的理论。

第十四卷中有 7 个命题，讲多面体的性质。

第十五卷中有 7 个命题，讲正多面体内接于另一正多面体的问题。

不少史学家以为第十四、十五卷是亚历山大城的希伯西克尔(Hypsicles)续写的。

从以上摘要让我们突出地感到两点：一是《几何原本》内容丰富，名副其实的博大精深；二是整个著作充满着对概念和逻辑的庄严追求，它成了几千年数学教育的最佳教材，现代的中学几何课本不过是《几何原本》改写成现代形式而已，历史上的大科学家都是由《几何原本》受到启蒙教育而成为科学大师的，他们之中的代表人物有哥白尼、伽利略、笛卡儿、牛顿、罗蒙诺索夫、拉格朗日、罗巴切夫斯基、李雅普诺夫、茹可夫斯基等；事实上，一切伟大的学者，历史上的和现代的数学家，都学习过《几何原本》。

由于历史的局限，和两千多年前数学科学的幼稚，毋庸讳言，《几何原本》存在着许多明显的缺点，虽然我们不应苛求古人，但以科学的态度探讨它的短处，对数学科学的进步只会有好处。

第一个缺陷是全书从未涉及几何学的应用，甚至连画圆与画直线

的圆规和直尺这些用具也不提及，当时古希腊的大多数数学家有一种偏见，认为自由人从事应用和近似计算是可耻的事，真是岂有此理！

第二个缺陷是作为理论出发点的基本概念（即定义）不少是表述不清的，而且在全书中亦未全用到这些定义，例如“点是没有部分的东西”是何意？定义 4 中“直线是……关于在其上的所有点位置是相等的”又是何意呢?！让人不知所云。

第三个缺陷是《几何原本》中没有关于位置的公理，所以说不严格什么是“在……内部”，“在……中间”，“在……外部”，涉及这些概念时，只能诉诸直观来表述与推理。

第四个缺陷是《几何原本》中没有连续性公理，于是像以线段 AB 为半径，以 A, B 为圆心的两个圆为什么一定有公共点就不能从理论上讲清楚了！

第五个缺陷是关于平行线的第五公设的正确性是不明显的，无不证自明性。