2.19 切分蛋糕

甲乙二人分食一块正三角形蛋糕，切一刀，每人吃其中一块。乙说蛋糕要由他来切，而且还要由他先挑。聪明的甲说同意，但要乙答应一个条件，条件是乙切蛋糕时刀刃必须经过甲指定的一点，设蛋糕的厚薄均匀，试问甲指定的点在何处才能使贪嘴的乙少占便宜？且问乙最多可以多吃多少蛋糕？

什么样的蛋糕乙占不着便宜？

有无一种形状的蛋糕，乙能得到比整个蛋糕的$\frac{3}{4}$还多的部分？

如果是中心对称形蛋糕，甲把“指定点”取在对称中心上，则乙只能把蛋糕等分，不会切出一块大一块小的情形，这样甲就迫使乙的贪婪企图落空，只能二人等分了；当蛋糕是圆形、椭圆形、正方形或正六边形等形状时，就会发生上述形势，这时乙占不到便宜。

对于正三角形的情形，甲把指定点取在三角形的重心是最佳策略，见图 2-67。

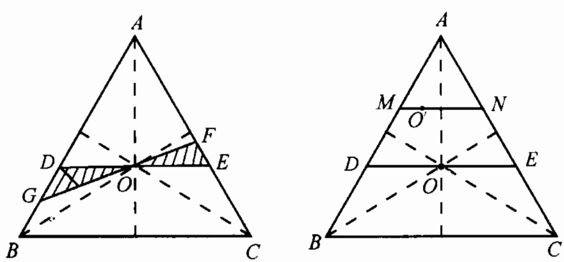

图 2-67

$\triangle ABC$ 是长边为 1 的正三角形，则乙只能过重心 O 平行于 BC 来切，不然，若过 O 点沿其他方向 GOF 来切，则他至多得到四边形 $BCFG$，这块蛋糕比梯形 $DECB$ 少，事实上，$\triangle OGD$ 的面积比 $\triangle OEF$ 的面积大。

如果甲把指定点定在 O' 处，$O' \neq 0$，则乙过 O' 沿 BC 平行的方向 MN 来切分，则乙会多得到一块梯形 $MNED$。所以甲唯一的选择是把指定点取在 O 点。

无论什么形状的蛋糕，乙也得不到 75% 以上的蛋糕。事实上，任何形状的蛋糕，甲总能从其上指定一点及过此点的两垂直线，使得这两条垂线把蛋糕划分成各占 25% 的四块。如果把这两条垂线视为平面上的坐标轴，则乙过指定点(原点)怎么切，都有至少一个象限的那部分蛋糕未被切分，所以乙至多得 $\frac{3}{4}$，不会超过 75%。

下面论证存在两垂直直线，把平面上任连通有界区域等分成四块，或曰，垂直切两刀，可把任意蛋糕等分成四块。

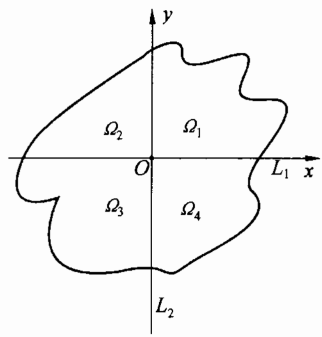

图 2-68

在平面上任意给定一个区域 Ω，见图 2-68，在 Ω 下方画一水平线 L，它与 Ω 无公共点，把 L 向上平移，存在 L_1 的一个唯一的位置，使得 Ω 在 L_1 的上方与下方的部分等积；再在 Ω 的左方画一条与 L_1 垂直的直线 L_2，把 L_2 向右方平行，则存在 L_2 的唯一的位置，使得 Ω 在 L_2 两侧的部分等积，于是

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_3 + \Omega_4 \tag{2.11}$$

$$\Omega_1 + \Omega_4 = \Omega_3 + \Omega_2 \tag{2.12}$$

其中 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 表示 Ω 被 L_1, L_2 划分的四部分的面积。由(2.11)、(2.12)得 $\Omega_1 = \Omega_3, \Omega_2 = \Omega_4$。考虑差 $\Omega_1 - \Omega_2$，若 $\Omega_1 - \Omega_2 =$

0，则得 $\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=\Omega_4$，即蛋糕被四等分，若 $\Omega_1-\Omega_2\neq 0$，下面指出适当调整十字架(L_1 与 L_2 构成的垂线)的位置，可以使得(2.11)、(2.12)满足且$\Omega_1-\Omega_2=0$。

不妨设 $\Omega_1-\Omega_2>0$，Ω_1 是第一象限的 Ω 部分，当十字架连续变动位置，在全过程中保持(2.11)、(2.12)成立，且最后原点仍落在原点上，x 正半轴落在原y 轴正半轴的位置，则 Ω 在第一象限的部分为 Ω_2，第二象限的部分为 Ω_3，而这时 $\Omega_1=\Omega_3$，故 $\Omega_2-\Omega_3<0$；在十字架的位置连续变化时，Ω 的第一象限的面积与第二象限的面积差也连续变化，今此差可取正亦可取负，所以此差在十字架连续变动且(2.11)、(2.12)保持时，即第一、二象限之和与第三、四象限之和相等，第一、四象限之和与第二、三象限之和相等时，第一象限与第二象限的 Ω 之面积差可以取到零，这时四个象限的 Ω 的面积相等，即蛋糕被四等分。