2.17 雪花几何

放眼宇宙，细看犬牙交错的海岸线，美丽对称而边缘并不平滑的雪花，以及天上的云朵，山中的枫叶……绝大多数的客观实物，并不像欧几里得几何中讨论的点、线段、圆、立方体、球等乃至笛卡儿的解析几何中的椭圆，椭球等那样单纯，复杂是宇宙的本性。有不少东西大处和小处的结构有相似性，例如太阳系，地球绕着太阳转，月亮又绕着地球转，月亮上的氢原子核外又有绕其旋转的电子，等等，这种无限嵌套的精细的层次结构实乃大自然的几何学。

(1)春风杨柳

春天到了，从一枝长 1 的柳条的$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{3}$处各长出长为$\frac{1}{3}$的新枝，见图 2-61，分叉点把树枝分成 5 段，每段又从其$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{3}$处长出新枝，此刚长出的新枝之长是该段长的$\frac{1}{3}$，如此生长下去，最后得到枝繁叶茂的一棵杨柳树。

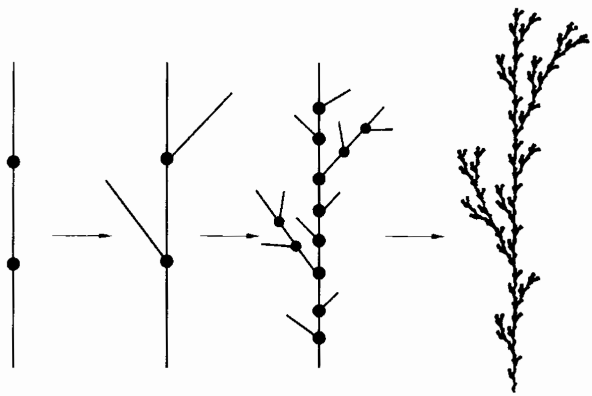

图 2-61

算一算枝条的总长度：

第一次生长了两个枝条，全长为 $1\times\frac{5}{3}$；

第二次又长出了十个枝条，全长为 $1\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$；如此递推，第 n 次又生长了若干枝条，全长为 $\left(\frac{5}{3}\right)^n$，当 n 很大时，$\left(\frac{5}{3}\right)^n$ 是十分巨大的数字，从理论上讲，如果无限生长下去，此树的枝条总长就是无穷的了。当然，由于自然条件的限制，真实的树木是不可能无限地增长的，由于天灾人祸和生物自身的衰老，到一定限度就不会再增长了。

(2) 隆冬雪花

E_0 是单位长线段；E_1 是 E_0 除去中间 $\frac{1}{3}$ 线段代之以底边在除去的线段上的正三角形的另两边所得的折线，E_1 上有四条线段；同样的操作用于 E_1 的每一线段得到 E_2 折线，以此类推，即 E_k 是把 E_{k-1} 的每个线段中间的 $\frac{1}{3}$ 用以它为底的“向外的”正三角形的另两边替代而得。当 k 趋于无穷时，则得一曲线，见图2-62。

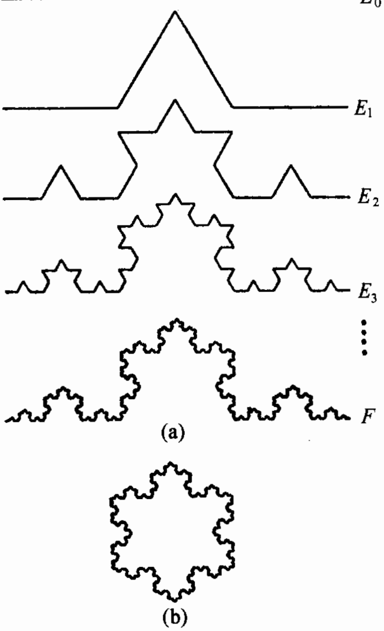

图 2-62

这条曲线是 1904 年由数学家科克(H. V. Koch)首创的，你细瞧海岸线，就有类似的形状。

Koch 曲线留在 E_0 上的部分是康托尘集。

三条 Koch 曲线围成一片雪花，见图 2-62(b)和图 2-63。

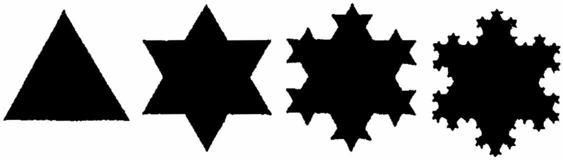

图 2-63

下面算一下雪花边界线的长度。由于每操作一步，所得折线是上一代折线的$\frac{4}{3}$，所以第 n 次 E_n 的长度是$\left(\frac{4}{3}\right)^n$，当 n 足够大时，$\left(\frac{4}{3}\right)^n$是十分巨大的数字，当 n 趋于无穷时，雪花边界长是无穷大。

再算一下雪花的面积。

E_1 与 E_0 夹的面积

$$A=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{36}$$

E_2 比 E_1 多了四个小三角形，它们的面积是$\frac{4}{9}A$，依此类推得

$$B=\left[1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3+\cdots\right]A=\frac{9}{5}A=\frac{\sqrt{3}}{20}$$

B 是E_0 与 Koch 曲线夹的面积，雪花总面积 C 为边长为 1 的正三角形加上 $3B$，即

$$C=\frac{3\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{5}\sqrt{3}$$

我们看到有限面积的边界却是无穷长的曲线。

(3) 清凉坐垫

用三条中位线把一个正三角形划分成四个正三角形，去掉中间的那个小正三角形；对于剩下的小正三角形，再用其三条中位线划分且舍去中间的小正三角形，如此不停地进行正三角形“去心”，最后得到的平面点集就成了一个满身大孔小孔的清凉坐垫，见图 2-64。

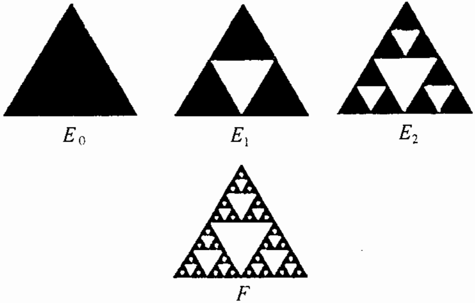

图 2-64

若原来正三角形的面积是 A,则剩下的点集的面积为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$$

从以上几个精彩的实例我们领会到,自然界许多东西都是由本来十分简单的事物为基础用简单的步骤的重复作用产生出来的,联想到为什么相对少量的遗传物质可以发育成复杂的器官,例如大脑乃至整个生物机体,还可以理解仅占人体质量5%的血管何时可以布满人体的每一部分等这些生物的“魔术”表现。