2.16 勾三股四弦五精品展

(1)中华牌 345 三角形

我国数学名著《周髀算经》中载名句:“句广三,股修四,径隅五。”译成白话文即勾三股四弦五,说的是公元前 1100 年前的大禹时代,

商高已知直角三角形的斜边是 5，短直角边(勾)是 3，长直角边(股)是 4。周髀二字的“周”是周朝，即《周髀算经》是周朝的数学著作，“髀”是股骨，周朝时人们用牛股骨作成测日光影子的工具，见图 2-51。

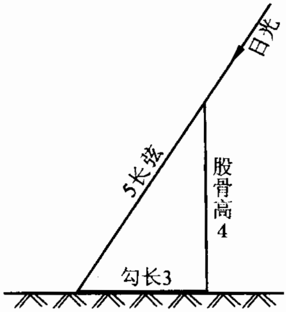

图 2-51

我国的赵君卿于公元 222 年为《周髀算经》作注，证明了勾股定理。赵君卿又名赵爽，是三国时代吴国人，他的证明看图 2-52不言自明。

事实上

$$
\begin{aligned}
c^2 &= \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + (a-b)^2 \\
&= 2ab + a^2 + b^2 - 2ab \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

即 $a^2 + b^2 = c^2$，若 $a = 3, b = 4$，则 $c = 5$，即勾 3 股 4 弦 5，图 2-52 中勾 3 股 4 弦 5 的三角形共四个，下面称三边比为 3∶4∶5 的直角三角形为 345 三角形，图 2-53 中的 345 三角形有 8 个：①，②，③，④，⑤，⑥，⑦，⑧。

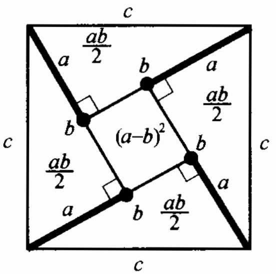

图 2-52

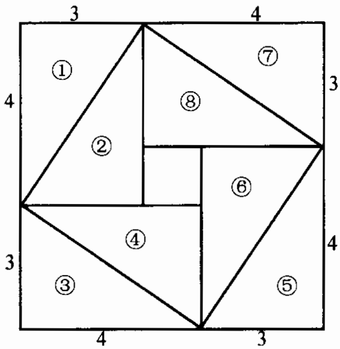

图 2-53

(2)徒手在正方形纸片上作出 24 个 345 三角形

只有一张正方形纸片，其上无任何标志，如何徒手地在这张正方形上显现出 24 个 345 三角形？

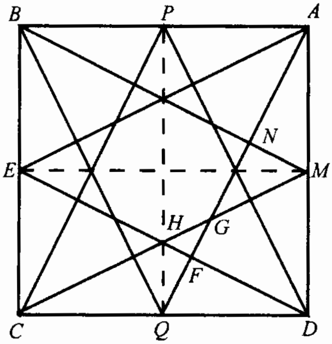

图 2-54

如图 2-54，容易证明与$\triangle GHF$全等的三角形共计八个，与$\triangle GMN$全等的三角形共计八个，与$\triangle AEF$全等的三角形共八个，其中 E, P, M, Q 是正方形各边中点，这四个中点可以由正方形纸片对折得到，进而沿 DE，DP，BQ，BM，AQ，AE，CM，CP 折叠，即得图 2-54 中各折痕线段和各三角形。而且容易看出$\triangle GHF \backsim \triangle GMN \backsim \triangle AEF$，下面只欠证$\triangle AEF$是 345 三角形。

事实上，设正方形边长为 2，则正方形面积为 4，$\triangle CEQ$ 面积是 $\frac{1}{2}$，$\triangle ABE$ 与$\triangle ADQ$ 面积和是 2，于是$\triangle AEQ$ 的面积为

$$4-2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}AQ \times EF=\frac{\sqrt{5}}{2} \times EF$$

于是 $EF=\frac{3}{\sqrt{5}}$，由勾股定理得 $AF=\frac{4}{\sqrt{5}}$，所以$\triangle AEF$ 是 345 三角形，进而得到 24 个 345 三角形。

常言道，工欲善其事，必先利其器；事实上，人手乃是世间最灵巧的工具，而最聪明者莫过于人脑，电脑永远不及人脑；上面不动用任何工具即造出 24 个 345 三角形即显示了手和脑的优势。

(3)方圆之中的 345 三角形

图 2-55 中，$ABCD$ 是正方形，F 是 DC 中点，以 F 为中心以 FD 为半径画圆，AGH 是此圆切线，G 是切点，H 在线段 BC 上，则

$\triangle ABH$ 是 345 三角形。事实上，设 $AB=1$，则 $AG=1$，设 $HC=x$，则 $HG=x$，$BH=1-x$ 由勾股定理得

$$(1+x)^2=1^2+(1-x)^2, x=\frac{1}{4}$$

于是 $AB=1$，$BH=\frac{3}{4}$，$AH=\frac{5}{4}$，可见$\triangle ABH$ 是 345 三角形。

E 是 AB 中点，由相似性，$\triangle AKE$ 与$\triangle FGK$ 也是 345 三角形；延长 FG 至 J，J 在 BC 上，则$\triangle HGJ$ 与$\triangle FCJ$ 也是 345 三角形。

作 $GP /\!/ BC$，P 在 DC 上；连接 DJ。与 EF 交于 I，作 $IM /\!/ AB$，M 在 AD 上；连接 AI。经简单计算知 $DM=\frac{1}{3}$，进而$\triangle FPG$，$\triangle EMI$，$\triangle AIE$，$\triangle AME$，$\triangle AMI$ 都是 345 三角形。

由于矩形 $AEIM$ 的对角线把此矩形划分成两个 345 三角形，所以从此矩形对角线交点作其边的平行线分得的四个小矩形仍有原矩形的性质，即每个小矩形的两条对角线画出四个 345 三角形，如此可得 $4+4^2+4^3+\cdots$个 345 三角形，即可得任意多个 345 三角形。

经过简单计算可以断定图 2-56 至图 2-60 中的阴影三角形是 345 三角形。

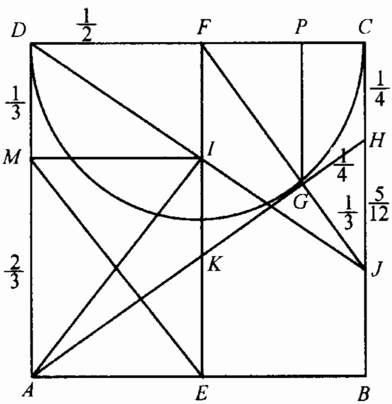

图 2-55

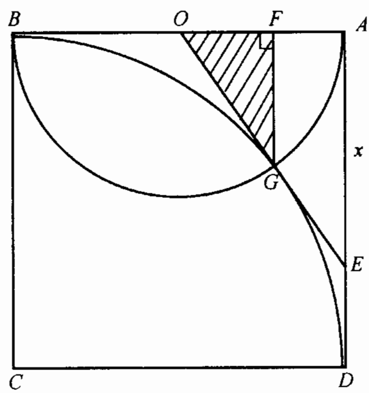

图 2-56

图 2-56 中 O 是 AB 中点，$ABCD$ 是单位正方形，G 是半圆⊙O 与$\frac{1}{4}$圆⊙C 的交点；于是 OGE 是⊙C 的切线，在△OAE 中，由勾股定理，$\left(\frac{1}{2}^{2}\right)+x^2=\left[\frac{1}{2}+(1-x)\right]^2$，$x=\frac{2}{3}$，$OA=\frac{1}{2}$，$OE=\frac{5}{6}$，所以△$OAE$ 是 345 三角形，由相似性，△OGF 也是 345 三角形。

以下各三角形（带阴影者）为什么是 345 三角形，请读者验算一下。

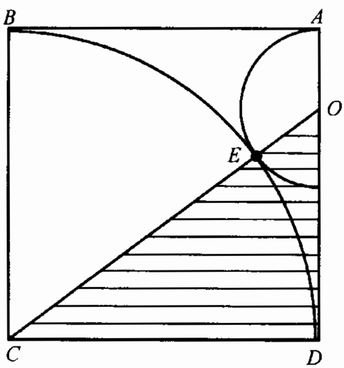

图 2-57

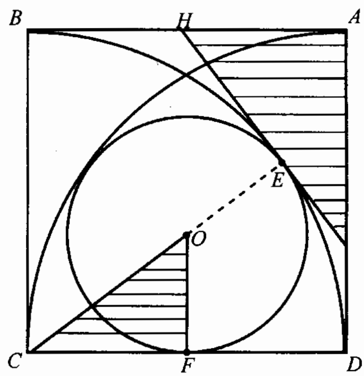

图 2-58

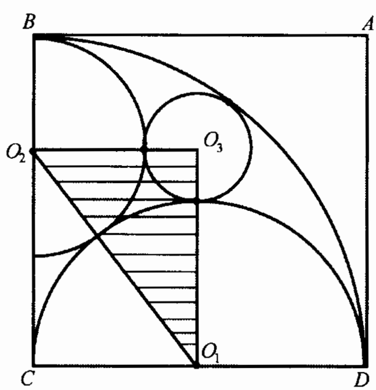

图 2-59

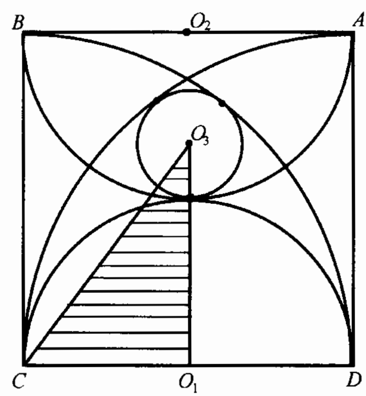

图 2-60