2.14 天上人间怎么这么多的圆和球

天上的行星、月球和太阳等星体，自然界的雨点露珠，橘子苹果，诸多天然之物，为什么那么多球状体？还有几乎人人爱好的足球、篮球，等等，乃至我们的眼球头颅，也都是球状物，德国著名数学家斯坦纳(S. Steiner, 1796～1863)揭穿了其中的天机。

一个有关的传说是,古罗马皇帝的女儿吉冬去非洲创立迦太基国,成为该国首任女皇,她欲在海边购买一块土地,吉冬向土地出售者提出要买"一张兽皮的土地",即把一张兽皮剪成了细条,结成一条长绳,她说买下这条绳围住的那么多土地,于是双方谈妥价钱。之后聪明的吉冬把绳作成半圆弧,此半圆直径在海岸线上,她心里明白,这时面积最大。

事实上,在等长的平面闭曲线所围面积当中,以圆面积最大。反之,在面积相等的平面图形中,圆的周长最小。

显然只需考虑凸的平面图形,即那些连接内部任意两点的线段,此线段完全属于这个图形所围的区域内部的图形。

为证明上述有关圆的命题,先讨论梯形。

在上下底的长度与高固定的梯形中,等腰梯形的两腰之和最短。

考虑梯形 $ABCD$,见图 2-47,关于 AD 的中垂线为 l, B 的对称点为 B', C_0 为 CB' 中点, C_0 关于 l 的对称点为 B_0,则 $BB_0 = B'C_0$。于是等腰梯形 AB_0C_0D 与 $ABCD$ 底与高分别等长,它们等面积。

作平行四边形 $DCHB'$,于是 $DH < DC + CH$。而 $DH = 2DC_0 = DC_0 + AB_0$, $CH = DB' = AB$,故

$$AB_0 + DC_0 < AB + DC$$

即在底边与高分别相等的梯形中,等腰梯形的两腰和最小。

设 Ω 是具有已知面积 S 而周长最短的平面图形,我们往证 Ω 是圆。

任作一直线 L,因为 Ω 是凸的,所以可以找到 Ω 上的两个点 P_1, P_2,使得过 P_1 与 P_2 垂直于 L 的两条直线所夹的带形之外无 Ω 上的点,设过 P_1, P_2 的垂线与 L 交于 Q_1, Q_2 两点,我们把线段 Q_1Q_2 进行 2^n 等分,过每一等分点作 L 的垂线,把 Ω 划分成 2^n 个长条区域,由于 n 充分大,长条很窄,可以把每个长条视为一个梯形,见图

2-48。对任一长条 $ABDC$，以 L 直线为对称轴作等腰梯形 $A'B'D'C'$，使它与 $ABDC$ 是等高等底的梯形，于是

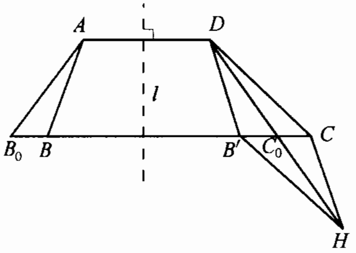

图 2-47

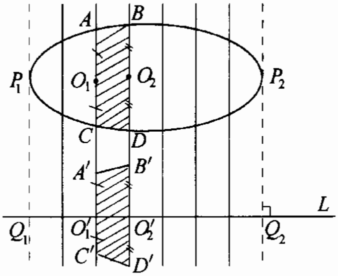

图 2-48

$$AB + CD \geqslant A'B' + C'D'$$

上式等号仅在 $ABDC$ 也是等腰梯形时成立。又 Ω 的周长是等积平面图形中的最小者，则由 $A'B'D'C'$ 这种等腰梯形并成的平面图形 Ω' 不但与 Ω 等积而且周长也与 Ω 的周长相等，则每个小梯形 $ABDC$ 皆等腰梯形，所以 Ω 有与 L 平行的一条对称轴 L'，L' 过 AC 中点 O_1。由 L 的任意值知 Ω 在任何方向上都有对称轴，这种图形一定是圆，即得知：

在等积的平面图形中，圆的周长最短。

下面论证其逆命题亦成立，即等长的平面闭曲线所围面积，圆面积最大。

事实上，设任一不为圆的平面图形 Ω 与圆 C 的周长都是 l，记 S_ω 是 Ω 的面积，S_C 是 C 的面积，若 $S_\omega \geqslant S_C$，考虑与 C 同心且面积为 S_ω 的圆 C'，则 C' 的周长 $l' \geqslant l$，但从前面论证知，这时应有在 C' 与 Ω 这两个平面图形中，圆 C' 的周长比 Ω 的周长短，即 $l' < l$，矛盾。故应有 $S_\omega < S_C$。

上述平面图形的结论可以推广到空间，有以下结论：

在表面积相等的所有立体当中，球有最大体积；在体积相等的所

有立体当中，球有最小表面积。

论证球的最优性的思路与论证圆的最优性的思路相似，只不过把等腰梯形改成下面的三棱柱 $ABC-A'B'C'$：$ABC-A'B'C'$ 有与侧棱垂直的对称平面。且易证下面事实，侧棱 AA'，BB'，CC' 有定长 a，b，c，且 AA'，BB'，CC' 分别位于三条给定的直线上的所有三棱柱中，有与侧棱垂直的对称平面者，其底面面积之和 $\triangle ABC+\triangle A'B'C'D$ 最小。

对于吉冬女皇"一张兽皮的土地"，如果她围的土地不是以海岸线一段为直径的半圆，则以海岸线为对称轴的一个平面图形 Ω 不是圆，这里 Ω 边界线的"陆地部分"由兽皮条构成，与 2 倍长兽皮条围成的圆相比，Ω 的面积小，可见吉冬的半圆是围地最多的。

从理论上讲，我们上面已论证出这种结论：吃苹果和橘子时，丢掉了一定数量的果皮，显然希望剩下的果肉越多越好，这就应当使苹果和橘子等水果是球形的；自然界真是数学家的奶娘，她已经按数学上最优化的要求长出了许多球状的水果。

反过来讲，例如雨点露珠，水的表面张力像一张收缩的橡皮膜一样地尽量缩小表面积。正如上述数学理论指出的，这一定质量的水滴应当是球状的，难怪自然界的球状物那么多，自然界"尽量节省皮肤"的原理被数学家道破了。