

## 2.13 逆风行舟

我们讨论一个很现实、很有趣的数学问题：

帆船如何顶北风向正北最快地航行？

显然，这也是奥林匹克运动会帆船运动员们最关心的问题之一。

首先考虑下面的问题：

当帆面与风向所成的角为  $\alpha$ ，与船的轴线所成的角是  $\beta$  时，帆船的航速  $c$  是多少？

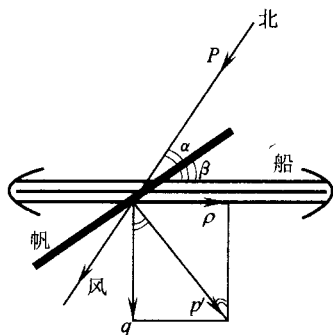


图 2-45

设帆面与风向垂直时，风对帆面的压力是  $P$ ，当  $\alpha \neq 90^\circ$  时，垂直于帆面的风压  $p' < P$ ， $p' = P \sin \alpha$ 。再把  $p'$  分解成沿船轴线方向的分量  $p = p' \sin \beta$  和垂直于船轴线的分量  $q = p' \cos \beta$ ，从而风加在航行方向上的压力为（图 2-45）

$$p = P \sin \alpha \sin \beta$$

帆船的速度  $c$  与  $p$  成正比

$$c = kp = kP \sin \alpha \sin \beta$$

$k$  是正常数。显然  $\alpha = \beta = 90^\circ$  时，即风是北风，船向南行，帆与船轴垂直时，船速最大，这时  $c_{\max} = kP$ ，令  $kP = C$ ， $C$  是最大船速。

下面讨论如何向北最快航行。这时船的轴线与风夹角  $\alpha + \beta$ ，船速向北分量为  $c' = c' \cos(\alpha + \beta) = C \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ ， $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ 。下面确定  $\alpha, \beta, \gamma$  的值，使  $c'$  最大。

如果  $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ ， $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  皆锐角，由于

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha' \sin \beta' = \cos(\alpha' - \beta') - \cos(\alpha' + \beta')$$

所以当且仅当  $|\alpha - \beta| > |\alpha' - \beta'|$  时， $\sin \alpha \sin \beta < \sin \alpha' \sin \beta'$ 。

考虑  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = 90^\circ$ ，其中  $\alpha' = 30^\circ$ ， $\gamma = \gamma'$ ， $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$ ，且  $\alpha = 30^\circ + \epsilon_1$ ， $\beta = 30^\circ - \epsilon_2$ ， $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ，皆锐角， $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ，则  $|\alpha - \beta| = \epsilon_1 + \epsilon_2$ ， $\beta' = 30^\circ - \epsilon_2 + \epsilon_1$ ， $|\alpha' - \beta'| = |\epsilon_1 - \epsilon_2| < |\alpha - \beta|$ ，所以

$$\sin 30^\circ \sin \beta' \sin \gamma' > \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad (2.4)$$

又  $\beta' + \gamma' = 60^\circ$ , 所以

$$\sin 30^\circ \sin 30^\circ \geq \sin \beta' \sin \gamma' \quad (2.5)$$

由(2.4)和(2.5)得

$$\sin 30^\circ \sin 30^\circ \sin 30^\circ \geq \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad (2.6)$$

即  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  时,  $c'$  最大。至此得知:

船的轴线与朝北方向成  $60^\circ$ , 且帆面平分这个角时, 向北航行最快, 这时最大北上速度为

$$c' = C \sin 30^\circ \sin 30^\circ \sin 30^\circ = \frac{C}{8}$$

即是顺风向南行最大速度的  $\frac{1}{8}$ , 见图 2-46。

只要使你的船头指向与逆风方向成  $60^\circ$ , 再把帆面转到这个  $60^\circ$  角的平分位, 不管何方来风, 总会使你向逆风方向航行得最快。这一结论也适用于无动力有舵渔船的漂流, 水流相当于风, 舵相当于帆。

为了达到预定地点 A, 可以扭转船头若干次, 使船头交替地在风向 AB 直线的两侧且使风向、船轴向和帆面间的角度仍为上述的角度。

处于逆境, 巧借阻力, 迂回曲折, 仍可达到目标!

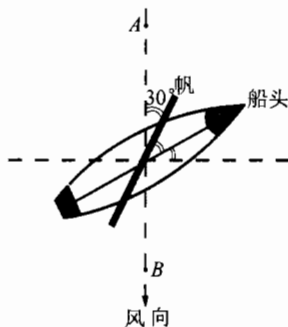


图 2-46