2.12 化圆为方的绝招

作一个正方形，使其面积和已知圆的面积相等，这就是化圆为方问题。

问题是数学的灵魂，为了解决化圆为方问题，古希腊数学家希庇亚斯发明了一条称为“割圆曲线”的奇怪曲线（当然这条曲线用规尺是作不成的）。割圆曲线是这样制成的：

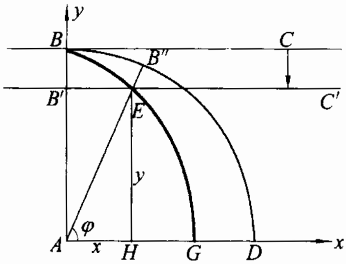

图 2-39

把线段 AB 绕 A 点顺时针匀速旋转 90°到 AD 位置，同时与 AD 平行的直线 BC 匀速平移到 AD 位置，动线段 AB 与动直线 BC 的交点形成的曲线称为割圆曲线，见图 2-39 中的粗实线。在同一时间内，BC 平移到 $B'C'$，AB 转到 AB''，AB''与 $B'C'$交于 E 点，动点 E 的轨迹 BG 即为割圆曲线，它把以 A 为中心的以 AB 为半径的$\frac{1}{4}$圆切割成两块，故有其名谓之割圆曲线。

下面导出割圆曲线的方程。记 $AB = a$，$AH = x$，$EH = y$，$\angle EAD = \varphi$，则 $\tan\varphi = \frac{y}{x}$，$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$；又

$$\frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{EH}{AB} = \frac{t}{T}$$

其中 T 是 AB 转动 90°所用时间，t 是 AB''转角 φ 所用时间，于是

$$\varphi = \frac{\pi}{2a}y,\ y = \frac{2a}{\pi}\varphi = \frac{2a}{\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

$$y = x\tan\frac{\pi y}{2a}\ 或\ x = \frac{y}{\tan\frac{\pi}{2a}y}$$

下面求 AG 的长度

$$AG=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan\frac{\pi}{2a}y}$$

又 $\tan\frac{\pi}{2a}y=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2a}y}{\cos\frac{\pi}{2a}y}$，而 $\cos\frac{\pi}{2a}y$ 当 $y\to 0$ 时以 1 为极限，所以

$$AG=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2a}y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2a}y}{\sin\frac{\pi}{2a}y}\cdot\frac{2a}{\pi}$$

令$\frac{\pi}{2a}y=t$，只需求出$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$。由图 2-40，$\triangle OAB$ 面积 $=\frac{1}{2}\sin t$，$\triangle OAT$ 面积$=\frac{1}{2}\tan t$，扇形 OAB 面积$=\frac{1}{2}t$，所以

$$\frac{1}{2}\sin t<\frac{1}{2}t<\frac{1}{2}\tan t$$

$$1<\frac{t}{\sin t}<\frac{1}{\cos t},\quad \cos t<\frac{\sin t}{t}<1$$

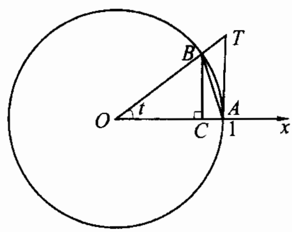

图 2-40

令 $t\to 0$，则

$$1\leqslant\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\leqslant 1$$

即$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$（显然 t 是负值时，此极限亦为 1）。

至此知 $AG=\frac{2a}{\pi}$，于是 AG，AB 皆已知线段，且

$$\frac{AG}{AB}=\frac{AB}{\frac{1}{2}\pi a}$$

割圆曲线作成后，AG 已画出，于是$\frac{1}{2}\pi a$ 是已知三线段的第四比例项，用规尺可作出长$\frac{1}{2}\pi a$ 的线段 l，以 l 为长，以 $2a$ 为宽作矩形，则

此矩形面积为 πa^2，即为已知圆的面积，令 $b^2=2la$，作 l 与 $2a$ 的比例中项 b，以 b 为边的正方形即与已知圆等积的正方形。

下面讨论把弯月亮形化成等面积的正方形的问题。所谓弯月亮形是指两圆相交于两点，在一圆内部而在另一圆外部的平面区域，图 2-41 的阴影部分就是两个弯月亮。

和化圆为方不能用规尺完成的难度有些区别的是，有些弯月亮是可以用规尺作出的。

①内外弓形角分别为 45°和 90°的弯月亮可以规尺作出，见图 2-42。

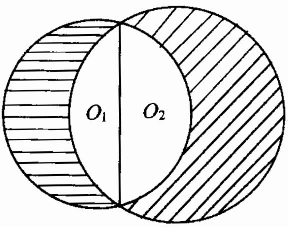

图 2-41

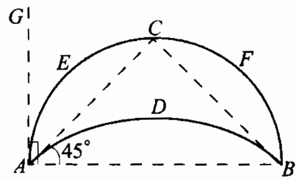

图 2-42

由于弓形角 $\angle GAB=90^\circ$，$\angle CAB=45^\circ$，其中 C 点在弯月亮的弧上，则 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$AB^2=AC^2+BC^2$；又由于

$$\frac{\text{弓形 } ACE}{\text{弓形 } ABD}=\frac{AC^2}{AB^2}, \frac{\text{弓形 } BCF}{\text{弓形 } ABD}=\frac{BC^2}{AB^2}$$

于是

$$\frac{\text{弓形 } ACE+\text{弓形 } BCF}{\text{弓形 } ABD}=\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}=1$$

从而得知弯月亮的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积。由于可以用规尺把 $\triangle ABC$ 化成等积的正方形，所以可把弯月亮 $ACBD$ 用规尺化成等积的正方形。

②若弯月亮的外弧上的弦 $AA_1=A_1A_2=\cdots=A_{n-1}A_n=A_{n-1}B$，

满足 $AA_1^2+A_1A_2^2+\cdots+A_{n-1}A_n{}^2=AB^2$，又 AA_1 弦在外弧上构成的弓形角与 AB 弦在内弧上构成的弓形角相等，则弯月亮可用规尺化成等积正方形，见图 2-43。

与①推理相似地可得外弧上的 n 个弓形的面积和等于内弧与 AB 弦组成的弓形面积，于是弯月亮的面积与多边形 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 的面积相等，而多边形 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 可以用规尺化成等积的三角形，此三角形再用规尺化成等积的正方形，于是终于用规尺把弯月亮化成等积的正方形。

但并不是任何弯月亮形都可以用规尺化成等面积的正方形。例如图 2-44 中 AB 是大半圆直径，$AC=CD=DB$，则以 AC 为直径的半圆的面积加上三个弯月亮的面积等于梯形 $ABDC$ 的面积，由于梯形可以规尺等积化方，所以三个弯月亮加一个半圆可以规尺化方，而已知半圆不可规尺等积化方，所以这三个弯月亮之和不可规尺化方，从而一个这种弯月亮不可规尺化方。

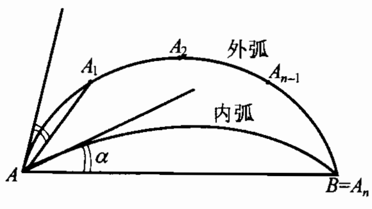

图 2-43

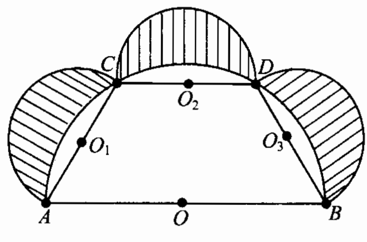

图 2-44