2.11 三等分角的阿基米德纸条

阿基米德想出了一个绝招，用一个纸条即可三等分任意给定的角，现介绍如下。

任给一角 Φ，以此角顶点 O 为圆心，以 r 为半径作圆$\odot O$，$\odot O$ 与此角两边分别交于A，B 两点，见图 2-35。

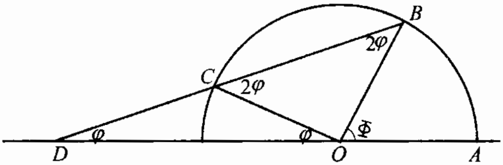

图 2-35

取一矩形纸条，在其边缘上标出相距为 r 的两点 C，D；令纸条的边缘过 B 点，且使 C 点落在$\odot O$ 上，D 点落在AO 的延长线上，则

$$\angle BDA=\varphi=\frac{1}{3}\Phi$$

事实上，$CD = OC = OB = r$，$\angle OCB = \angle OBC = 2\angle CDO = 2\varphi$，于是$\triangle OBD$ 的外角 $\Phi = \angle OBC + \angle CDO = 2\varphi + \varphi = 3\varphi$，即$\angle BDA$ 是已知角Φ 的$\frac{1}{3}$。

木工师傅中巧如鲁班者大有人在，不知何年何人用"鲁班尺"发明了三等分任一角的方法；所谓鲁班尺，或称木工尺，是形如图 2-36 的直角尺。在过尺的拐角内点 B 与尺边 BD 垂直的尺边缘直线上取一点 C，使 BC 等于尺宽 AB；任给一角$\angle EOF$，先用鲁班尺画一条与 OE 相距为尺宽 AB 的平行线 l，见图2-37。使鲁班尺的边缘上的点 A 落在 l 上，C 点落在 OF 上，且边缘线 BD 过 O 点，如图 2-38。则沿边缘 DB 画出的直线 l' 与 OF 的夹角是$\angle EOF$ 的$\frac{1}{3}$。事实上，作 $AG \perp OE$，G 为垂足，则直角三角形 $\triangle OAG \cong \triangle OAB \cong \triangle OBC$，故 $\angle AOG = \angle AOB = \angle BOC = \frac{1}{3}\angle EOF$。

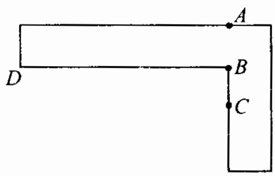

图 2-36

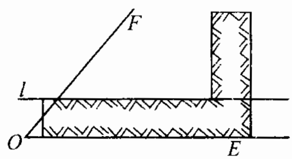

图 2-37

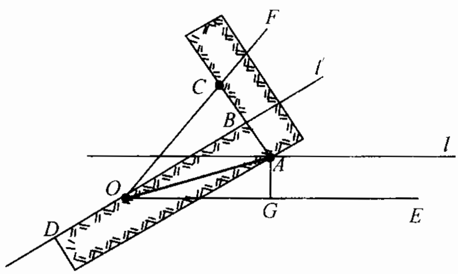

图 2-38