2.9 倍立方问题的丝线解法

公元前四世纪，古希腊的智人学派（也称巧辩学派）提出并研究三大几何作图问题：

倍立方问题，化圆为方问题和三等分角问题。

当时限定只许用圆规直尺来解，直到19世纪才证明了用圆规与直尺不可能解决上述三大几何作图问题。1837年，旺策尔（P. Wantzel）证明了倍立方与三分角的不可能性，1882年，林德曼（C. Lindemann）证明了 π 的超越性，从而推断只用圆规直尺不能化圆为方，即不能用规尺作一个与已知圆等面积的正方形。

关于倍立方的提出，传说很多。埃拉托塞尼（Eratosthenes，公元前226～公元前195年）在名著《柏拉图》一书中写道：太阳神阿波罗向提洛岛的人们宣布，瘟疫即将流行，为了摆脱灾难，必须把德里安祭坛的体积扩大，变成现在这个立方体祭坛体积的2倍，而且要求仍然是一个立方体。工匠们百般努力，百思不得其解，于是去请教柏拉图，柏拉图提醒大家，神发布这个谕示，并不是想得到一个体积加倍的祭坛，而是以此难题来责难希腊人对数学的忽视和对几何学的冷淡。

埃拉托塞尼是国王托勒密（Ptolemy）之子的家庭教师，他把自己关于倍立方的工作上报给托勒密国王，引起了国王的重视，在全国悬赏征解。

又传古代一位希腊悲剧诗人描述过名叫弥诺斯的匠人为皇族格

劳科斯修坟的故事。弥诺斯说,原来设计的每边都是百尺的立方体坟墓,对于殉葬者众多的皇家而言还嫌太小,要求他把其体积加倍。

当时古希腊关于倍立方的传说满天飞,可见人们对这一问题的重视和兴趣。

虽然1895年著名数学家克莱茵已经对三大作图问题作了总结,严格证明了它们用规尺绝不可解,彻底解决了两千多年的悬案,但用其他几何方法还是可以准确地(非测量地)解决这三个问题的。

设 k 是立方体的棱长,x 是所求立方体的棱长,使得以 x 为棱的立方体体积为以 k 为棱长的立方体体积的2倍,这就是倍立方问题,这时

$$x^3=2k^3$$

希腊数学家梅纳奇马斯(Menaechmus,公元前375～325)考虑两条抛物线

$$x^2=ky,\ y^2=2kx$$

的交点,由于 $x^4=k^2y^2=2k^3x$,所以这两个抛物线的交点横坐标为 $x^3=2k^3$,此交点横坐标即为所求的立方体之棱长。

笛卡儿(Descartes,1596～1650)只用上面两条抛物线中的一条就求得了 x。事实上,上述两抛物线的交点 (x,y) 满足

$$x^2+y^2=ky+2kx$$

$$(x^2-2kx+k^2)+\left[y^2-ky+\left(\frac{k}{2}\right)^2\right]=k^2+\frac{k^2}{4}$$

$$(x-k)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{5}{4}k^2,$$

这是一个中心在 $\left(k,\frac{k}{2}\right)$,半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}k$ 的圆,此圆过两抛物线的交点,所以为求两抛物线交点的横坐标 x,只需求上述圆与抛物线 $x^2=ky$ 或 $y^2=2kx$ 之一的交点(圆比抛物线容易作出)。

上述方法要做抛物线,这件事用规尺不能完成。

下面介绍一种巧妙的“丝线作图法”:

①画出边长为 k 的正三角形$\triangle ABC$,延长 CA 到 D,使得 $AD=k$。

②做射线 DB,AB。

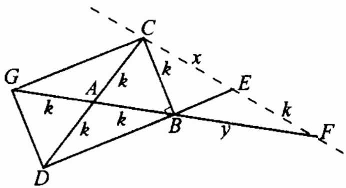

图 2-34

③取丝线一条,在其上标出两点 E,F,使 $EF=AB=k$。

④拉直丝线,使其通过 C 点,且 E,F 点分别落在射线 DB 和 AB 上。

于是 $CE=k\sqrt[3]{2}$,即 CE 为体积加倍的立方体的棱长。

事实上,设 $x=CE$,$y=BF$,见图 2-34,$\triangle DBC$ 是直角三角形,在$\triangle BCF$ 中,由余弦定理

$$CF^2=CB^2+BF^2-2CB\cdot BF\cos\angle CBF$$

即

$$(x+k)^2=k^2+y^2-2ky\cos120^\circ=k^2+y^2+ky$$

$$(x+k)^2-k^2=y^2+ky$$

延长 BA 到 G,使 $BA=AG=k$,则 $GC\parallel BE$,于是

$$\frac{k}{y}=\frac{x}{2k},xy=2k^2$$

$$\begin{cases}xy=2k^2\\x^2+2kx=y^2+ky\end{cases}$$

解得 $x=k\sqrt[3]{2}=CE$。