2.8 费尔巴哈九点圆

三角形三边中点，三条高的垂足，垂心到三个顶点线段的中点，这九个点是否共圆？

1765年，欧拉回答说："是。"1822年，费尔巴哈再次发现此圆，由于当时的传媒比欧拉时代发达，所以人们一般把此圆称为费尔巴哈圆或九点圆，而不称其为欧拉圆，1821年数学家彭色列(Poncelet)给出第一个九点共圆的证明，1822年费尔巴哈汇总和补充了关于九点圆的论述，写成一本小册子公开出版。

下面介绍彭色列的证明(此证明经后人多次修改)。

设 A', B', C' 分别是 $\triangle ABC$ 三条边 BC, AC 和 AB 的中点，D 是高 AD 的垂足，见图 2-33，则 $DA'B'C'$ 是等腰梯形。$DA'B'C'$ 是一个圆 $\odot O$ 的内接四边形，即 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆 $\odot O$ 上有三角形高的垂足，于是 $\triangle ABC$ 三条高的垂足 D, E, F 都在此圆上。

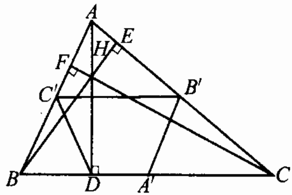

图 2-33

设 $\triangle ABC$ 的垂心是 H，下证 AH, BH, CH 的中点也在 $\odot O$ 上。

对$\triangle HBC$而言，D, E, F也是其三高的垂足，由上面所证，过$\triangle HBC$三边中点的圆也过D, E, F。即HB, HC之中点在$\odot O$上，同理HA的中点也在$\odot O$上，即$\odot O$是欲求证的九点圆。

显然九点圆半径是$\triangle ABC$外接圆半径之半。