2.7 阿尔哈达姆桌球

公元 1000 年左右，阿拉伯数学家阿尔哈达姆(965～1039)提出下面的桌球问题：

一张圆形弹子台上有两个弹子球，用什么方法冲击一球，使该球碰到台边折回后恰撞击到另一只球？

上述问题的等价提法有：

①在已知圆内作一个两腰分别过圆内两个已知点的圆内接等腰三角形。

②在一个圆的圆周上找一点，使其与圆内两已知点的距离之和最小。

③在一个球面凹面镜上找一点，使由一个已知点射来的光线在此点反射到另一已知点。

阿尔哈达姆的名字很啰嗦，英文译名为 Abu Ali al Hassan ibn al Hassan ibn Alhaitham，有时被译成阿尔哈森(Alhazen)。很多有名的数学家研究过阿尔哈达姆问题，例如黎卡提、休金斯、巴诺等知名人物。

下面介绍①这种提法的解答。

设 O 为已知圆心，r 是半径，圆内已知点为 $P(A,B)$和 $p(a,b)$，直角坐标系的原点为 O。

设$\triangle MSs$ 是已作出的圆内接等腰三角形，记$\angle SMO=\Phi$，$\angle sMO=\varphi$，则 $\Phi=\varphi$，见图 2-31。设 PM，OM，pM 与 x 轴夹角分别

为 Λ, μ, λ,则

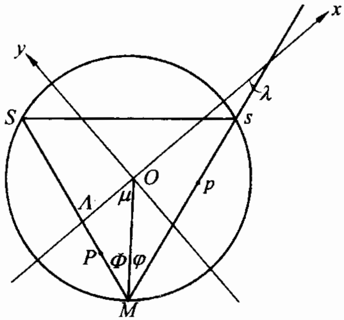

图 2-31

$$\Phi = \Lambda - \mu, \varphi = \mu - \lambda$$

$$\tan\Phi = \frac{\tan\Lambda - \tan\mu}{1 + \tan\mu\tan\Lambda}, \tan\varphi = \frac{\tan\mu - \tan\lambda}{1 + \tan\mu\tan\lambda}$$

设 M 的坐标是(x, y),则

$$\tan\Lambda = \frac{y - B}{x - A}, \tan\mu = \frac{y}{x}, \tan\lambda = \frac{y - b}{x - a}$$

由于 $\tan\Phi = \tan\varphi$,故有

$$\frac{\frac{y-B}{x-A} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{y-B}{x-A}} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y-b}{x-a}}{1 + \frac{y}{x}\frac{y-b}{x-a}}$$

$$\frac{Ay - Bx}{x^2 + y^2 - Ax - By} = \frac{bx - ay}{x^2 + y^2 - ax - by}$$

令

$$Ab + Ba = H,\ Aa - Bb = K$$

$$A + a = h,\ B + b = k$$

则得

$$H(x^2 - y^2) - 2Kxy + (x^2 + y^2)[hy - kx] = 0,$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

于是

$$L: H(x^2-y^2)-2Kxy+r^2(hy-kx)=0$$

L 是双曲线,即所求的 M 点是双曲线 L 与圆的交点。

由于双曲线与圆可以有四个交点,所以此题可有四个解。

有些特殊情形值得一提,例如 P 与 p 到圆心 O 相距都是 c,取 Pp 的垂直平分线为 x 轴,则 $A=a, B=-b, H=0, K=c^2, h=2a, k=0$。

于是 L 变成

$$L': -2c^2xy+2ar^2y=0$$

$$y=0 \text{ 或 } x=a\frac{r^2}{c^2}$$

由于所求点 M 在 $x^2+y^2=r^2$ 上,对于 $y=0$,得 $x=\pm r$,即 M 是 x 轴与圆的两个交点。此与我们的经验一致,印证了上面的分析是符合实际的。

阿尔哈达姆还解决了下述问题:

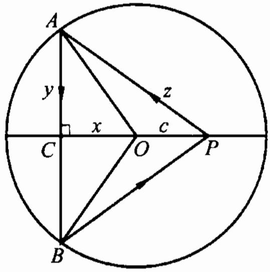

图 2-32

怎样冲击圆台桌球的弹子球,使其两次碰壁后返回原位。

设球桌半径为 r,中心为 O,球原位在 P 点,$OP=c$ 已知,若球第一次碰壁在 A 点,第二次碰壁在 B 点,再反射通过 P 点,见图 2-32,则 OA, OB 是 $\triangle ABP$ 的内角平分线。设 AB 与 OP 交于 C, $OC=x$, $AC=y$, $AP=z$, 在 $\triangle APC$ 中,由内角平分线定理,$\frac{y}{z}=\frac{x}{c}$;由勾股定理得

$$r^2=x^2+y^2, z^2=y^2+(x+c)^2$$

$$2cx^2+r^2x-cr^2=0$$

$$x=\frac{-r^2\pm\sqrt{r^4+8c^2r^2}}{4c}$$

只能取“+”号,即

$$x=\frac{-r^2+\sqrt{r^4+8c^2r^2}}{4c}$$

$$=\frac{-r^2+r\sqrt{r^2+8c^2}}{4c}$$

求得 C 点后,过 C 作 OP 的垂线与圆的交点即为所求的碰壁点。