2.6 椭圆规和卡丹旋轮

1657 年，荷兰数学家施古登(F. Schooten, 1615～1660)提出如下的有趣问题：

平面上给定三角形的两个顶点沿平面上一个角的两边滑动，求第三个顶点的轨迹。

在上述施古登问题提出一千多年前，鲍克勒斯(B. Proclus, 410～

485)提出并解决了下面类似的问题：

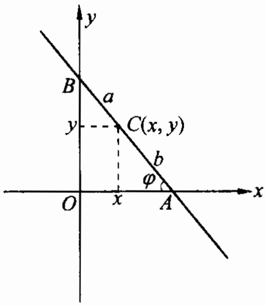

图 2-28

一条动直线上有三个点，其中两个点沿一个固定的直角的两个边滑动，求第三点的轨迹。

事实上，把直角的两条边视为正 x 轴与正 y 轴，直线上的点 A 在 x 轴上滑动，B 点在 y 轴上滑动，见图 2-28。C 点坐标为 (x, y)，设直线与 x 轴夹角为 φ，则

$$x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$$

其中 $BC = a$，$AC = b$，于是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

可见 C 点在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上，C 点在 AB 线段之外时，相似地可以知道 C 点的轨迹仍为椭圆。

用鲍克勒斯轨迹可以制作一个椭圆规：

在木制十字架上开两个成直角的槽，一根杆子的两端各有一只滑钉固定在杆子上，杆子的某点上固定一支铅笔，当两端钉子在槽内滑动时，铅笔画出椭圆。

我们发现，鲍克勒斯轨迹中的直角是施古登轨迹中那个角的特殊情形，直线上的三个点 A, B, C 是施古登轨迹中那个三角形的顶点。所以施古登轨迹是鲍克勒斯轨迹的推广。

设 α 是平面上固定的角，$\triangle ABC$ 的顶 A 与 B 在 α 两边上滑动，以 AB 为弦以 α 为弦 AB 所对的圆周角作圆 O，过中心 O 与 C 的直线与 $\odot O$ 交于 D 点与 E 点，当 $\triangle ABC$ 的 A, B 顶在 $\angle\alpha$ 边上滑动时，此动圆始终过 $\angle\alpha$ 的顶点 F，动圆直径长不变。$\angle EFD$ 始终是直角，见图 2-29。从 D, E, C 三点来看，此三点是一条动直线上的三个点，

E 与 D 分别在一个直角两边上滑动，由鲍克勒斯轨迹知，C 点的轨迹是椭圆。

意大利数学家卡丹(Cardano, 1501～1576)设计了一个所谓卡丹旋轮：一个圆盘沿另一大圆盘的内沿滚动，大圆盘半径是小圆盘的 2 倍。

卡丹问：小圆盘上任标定的一点的轨迹是什么？

卡丹答：该轨迹是一个椭圆。

设开始时标志点 M 在小圆盘直径 AB 上，且 A 与大圆盘中心 O 重合，B 在大圆盘边界上 D 点。作大圆盘正交的直径 CD 与 EF，见图 2-30。滚动的过程可视为 A, M, B 在动直线上，A, B 两点沿直角边滑动，求 M 点的轨迹，由鲍克勒斯轨迹知，M 点的轨迹是一个椭圆，其半轴分别为 AM 与 MB。

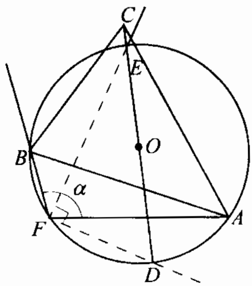

图 2-29

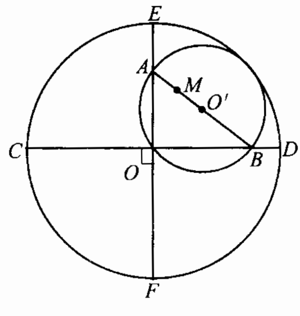

图 2-30

市场上有一种称为“大白兔繁花规”的数学玩具，大白兔形的塑料板上挖掉一个圆片，内侧制成小齿牙，另有五只较小的圆盘，半径不一定如卡丹旋轮那样是白兔身上圆孔半径之半，小圆盘边缘也有齿牙，每个小圆盘上钻有小孔若干，把圆珠笔尖插入小孔，且使小圆盘沿大白兔身上的孔滚动，则圆珠笔在下面垫的纸上画出奇妙对称的图案。此游戏明显是受了卡丹旋轮的启发发明的，不难证明，仅当

小圆盘的公转周期与其自转周期之比是有理数时，才能画出封闭曲线。卡丹旋轮的公转周期与自转周期之比是 2，所以它画出的是闭曲线（椭圆），建议读者自制一套或选购一套繁花规玩玩看，画出的图案一定使你赏心悦目。