2.5 高斯墓碑上的正 17 边形

1801 年,高斯在他的代表作《算术研究》一书中解决了用圆规直尺对圆周进行 17 等分的千年难题。欧几里得时代,已经有用规尺把圆周三等分和五等分的做法,令人不解的是在以后的两千多年当中,几何学家谁也不会用规尺把圆周 17 等分。高斯 19 岁时用代数方法解决了这一问题,轰动了当时的数学界。高斯逝世后,人们为了缅怀这位“数学家之王”,在他的墓碑上刻了一个正 17 边形的美丽图案。

用复数 $a+ib$ 表示坐标为(a,b)的点,$a+ib$ 可以写成

$$a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$是点(a,b)到原点的距离,θ 是点(a,b)的向径与 x 轴之夹角。单位圆上的点可用 $\cos\theta+i\sin\theta$ 来表示。

棣美弗(A. Demoivre, 1667～1754)给出复数 n 次幂公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

正 n 边形的一个顶点在$(1,0)$,则它的全体顶点是

$$\varepsilon_1=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

$$\varepsilon_2=\cos2\varphi+i\sin2\varphi$$

$$\varepsilon_3=\cos3\varphi+i\sin3\varphi$$

……

$$\varepsilon_{n-1}=\cos(n-1)\varphi+i\sin(n-1)\varphi$$

$$\varepsilon_n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi=1,\ \varphi=\frac{2\pi}{n}$$

于是此正 n 边形的顶点是方程 $Z^n=1$ 的 n 个根。我们只需求出 $Z^n=1$ 的除 1 之外的其他 $n-1$ 个根,则可以画出一个正 n 边形了,这 $n-1$ 个根满足

$$\frac{Z^n-1}{Z-1}=Z^{n-1}+Z^{n-2}+\cdots+Z^2+Z+1=0$$

为得到正 17 边形，应该解方程

$$Z^{16}+Z^{15}+\cdots+Z^2+Z+1=0 \tag{2.3}$$

取 $\varphi=\frac{2\pi}{17}$，$\varepsilon=\varepsilon_1=\cos\varphi+i\sin\varphi$。$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{17}$为正 17 边形的顶点($\varepsilon_0=\varepsilon_{17}$)。

考虑下列各点：

$$Z_0=\varepsilon, Z_1=\varepsilon^3, Z_2=\varepsilon^9, Z_3=\varepsilon^{10}, Z_4=\varepsilon^{13}, Z_5=\varepsilon^5,$$

$$Z_6=\varepsilon^{15}, Z_7=\varepsilon^{11}, Z_8=\varepsilon^{16}, Z_9=\varepsilon^{14}, Z_{10}=\varepsilon^8,$$

$$Z_{11}=\varepsilon^7, Z_{12}=\varepsilon^4, Z_{13}=\varepsilon^{12}, Z_{14}=\varepsilon^2, Z_{15}=\varepsilon^6$$

不难验证 $Z_i^3=Z_{i+1}$, $i=0,1,2,\cdots,15$。令

$$\begin{aligned} x_1 &= Z_1+Z_3+Z_5+Z_7+Z_9+Z_{11}+Z_{13}+Z_{15} \\ &= \varepsilon^3+\varepsilon^{10}+\varepsilon^5+\varepsilon^{11}+\varepsilon^{14}+\varepsilon^7+\varepsilon^{12}+\varepsilon^6, \\ x_2 &= Z_0+Z_2+Z_4+Z_6+Z_8+Z_{10}+Z_{12}+Z_{14} \\ &= \varepsilon+\varepsilon^9+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{16}+\varepsilon^8+\varepsilon^4+\varepsilon^2, \end{aligned}$$

由于 $Z_i(i=0,1,2,\cdots,15)$是(2.3)的根，故

$$x_1+x_2=-1$$

经计算得知

$$x_1x_2=-4$$

所以 x_1, x_2 是二次方程

$$x^2+x-4=0$$

的两个根

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$u+v=17$ 时，ε^u 与 ε^v 关于实轴对称，见图 2-27。

考虑

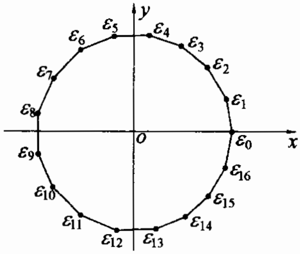

图 2-27

$$U = Z_0 + Z_4 + Z_8 + Z_{12} = \varepsilon + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^4$$

$$u = Z_2 + Z_6 + Z_{10} + Z_{14} = \varepsilon^9 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^8 + \varepsilon^2$$

$$V = Z_1 + Z_5 + Z_9 + Z_{13} = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{12}$$

$$v = Z_3 + Z_7 + Z_{11} + Z_{15} = \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7 + \varepsilon^6$$

于是

$$U + u = x_2,\ V + v = x_1$$

$$Uu = Vv = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \cdots \varepsilon^{16} = -1$$

U 与 u 是二次方程 $t^2 - x_2 t - 1 = 0$ 的解；V 与 v 是二次方程 $t^2 - x_1 t - 1 = 0$的解。解得

$$U = \frac{x_2 + \sqrt{{x_2}^2 + 4}}{2},\ u = \frac{x_2 - \sqrt{{x_2}^2 + 4}}{2}$$

$$V = \frac{x_1 + \sqrt{{x_1}^2 + 4}}{2},\ v = \frac{x_1 - \sqrt{{x_1}^2 + 4}}{2}$$

令

$W = Z_0 + Z_8 = \varepsilon + \varepsilon^{16},\ w = Z_4 + Z_{12} = \varepsilon^{13} + \varepsilon^4$

则 $W + w = U,\ Ww = V$，W 与 w 是方程 $t^2 - Ut + V = 0$ 的两个实根，$W = \dfrac{U + \sqrt{U^2 - 4V}}{2},\ w = \dfrac{U - \sqrt{U^2 - 4V}}{2}$。

由以上分析可得正 17 边形的做法步骤如下：

①用规尺作线段 $x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$(已知圆半径为 1)。

②用规尺作线段 U, V。

③用规尺作线段 W。

④在实轴上标出 W 点,作 OW 的垂直平分线与单位圆交于 A, B 两点,从(1,0)点到 A 点(或 B 点)的弦即为此圆内接正 17 边形的边长。

高斯的上述做法是几何、代数与复数的完美结合之典范。等分圆周的问题并非同一档次的问题,有的平凡原始,例如三等分,四等分和五等分,有的则植根于深刻的理论山巅之上。在代数基本定理(在复数范围内 n 次方程有 n 个根)和复数理论建立之前,凭任欧几里得、阿基米德乃至牛顿等大人物如何聪明,也未能解决貌似初等的作正 17 边形的问题;数学当中有不少这种性质的问题,表面上看,提法朴素初等,人人可以弄清楚是在要求干什么,甚至和已经解决了的问题似乎同类,但百思不得其解,其难度隐藏在某些尚未发现的数学理论之中,只能等待纯数学搞出那个可以解决该问题的理论之后,才会得出该问题的解法,作正 17 边形和化圆为方等规尺作图就是这种性质的问题。