2.4 拿破仑三角形

拿破仑·波拿巴(Napoleon, 1769～1821),出生在地中海的科西嘉岛,毕业于法国炮兵学校,后任炮兵军官。此人对射击、测量中的几何与三角颇有研究,1804 年加冕成为“法兰西第一帝国”的皇帝,建立资产阶级的军事专政,称帝前与当时著名数学家拉普拉斯、拉格朗日等讨论过数学问题,以这位野心家和独裁者命名的“拿破仑三角形”就是他数学活动的代表作。

以任意给定的三角形的三边为边向形外和形内分别做三个正三角形,形外的三个三角形的中心为顶的三角形称为拿破仑外三角形,形内的三个三角形的中心为顶的三角形称为拿破仑内三角形。拿破仑发现:

拿破仑外三角形与拿破仑内三角形都是正三角形。

拿破仑崇尚实力与科学,例如他与拉普拉斯和拉格朗日私交甚厚,并封二位数学家为伯爵,任命他们为内阁大臣,经常向二位请教数学问题。拉普拉斯对拿破仑提出和证明的拿破仑三角形十分佩服,曾由衷地请这位皇帝给大家“上一次几何课”。

下面介绍拿破仑三角形是正三角形的证明。

设$\triangle ABC$的拿破仑外三角形是$\triangle PQR$,见图 2-23,其中 P, Q, R 分别是正三角形$\triangle BCA'$, $\triangle ACB'$, $\triangle ABC'$的外心,先证$\odot P$, $\odot Q$, $\odot R$ 交于一点 D,事实上,设$\odot Q$, $\odot R$ 交于一点 D,连接 AD, BD, CD,由于$\angle B' = \angle C' = 60°$,则$\angle ADC = \angle ADB = 120°$,于是$\angle BDC = 120°$,又$\angle A' = 60°$,故$\odot P$ 过 D 点(图 2-23 中$\angle BAC <$

$120°$；不然，$\angle BCA < 120°$）。

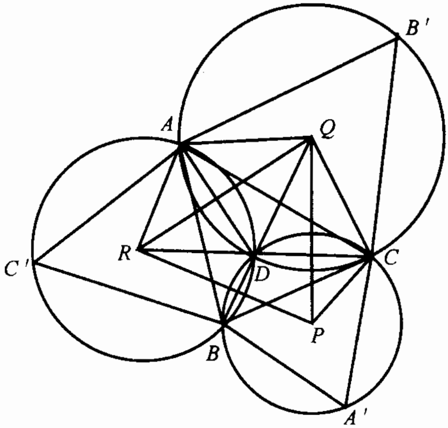

图 2-23

连 AR，AQ，DQ，DP，CP，CQ，DR，则 $\triangle ARQ \cong \triangle DRQ$，$\triangle DPQ \cong \triangle CPQ$，于是 $\angle AQR = \angle DQR$，$\angle DQP = \angle CQP$，又 $\angle AQC = 120°$，所以，$\angle RQP = \frac{1}{2}\angle AQC = 60°$；同理可得 $\angle PRQ = \angle RPQ = 60°$，于是 $\triangle PQR$ 是正三角形。

下面考虑拿破仑内三角形 $\triangle P'Q'R'$，见图 2-24，其中 $\triangle PQR$ 是 $\triangle ABC$ 的拿破仑外三角形，已有 $PQ = QR = RP$。设 $AC = b$，$AB = c$，$BC = a$，则有 $AQ = \frac{\sqrt{3}}{3}b$，$AR = \frac{\sqrt{3}}{3}c$，$\angle CAQ = \angle BAR = 30°$，所以 $\angle QAR = 60° + \angle BAC$。

在 $\triangle AQR$ 和 $\triangle AQ'R'$ 中，由余弦定理得

$$
\begin{aligned}
QR^2 - Q'R'^2 &= \frac{2}{3}bc[\cos(\angle BAC - 60°) - \cos(\angle BAC + 60°)] \\
&= \frac{4}{3}bc\sin\angle BAC\sin 60° \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{3}bc\sin\angle BAC
\end{aligned}
$$

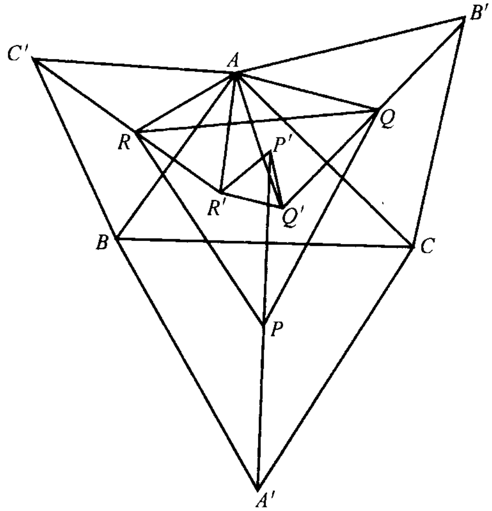

图 2-24

同理可得

$$PQ^2 - P'Q'^2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}ab\sin\angle BCA$$

$$PR^2 - P'R'^2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}ac\sin\angle ABC$$

又 $bc\sin\angle BAC = ab\sin\angle BCA = ac\sin\angle ABC = 2\triangle ABC$ 的面积，又 $QR = PQ = PR$，所以 $Q'R' = P'Q' = P'R'$，即拿破仑内三角形是正三角形。

由于拿破仑外三角形$\triangle PQR$ 的面积为

$$\frac{1}{2}QR^2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}QR^2$$

拿破仑内三角形$\triangle P'Q'R'$的面积为

$$\frac{1}{2}Q'R'\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}Q'R'^2$$

所以

$$\triangle PQR-\triangle P'Q'R'=\frac{\sqrt{3}}{4}(QR^2-Q'R'^2)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{2}{3}\sqrt{3}bc\sin\angle BAC$$
$$=\triangle ABC$$

($\triangle ABC$ 等同时表示该三角形的面积),即拿破仑外三角形与内三角形面积之差恰为原三角形的面积。

历史上,帝王和国家领袖作数学者凤毛麟角,除拿破仑外,还有美国总统詹姆斯·加菲尔德和法国总统戴高乐。加菲尔德是美国第20届总统,1881年当选,共和党人,他给出了一个十分巧妙的关于勾股定理的证明,在波士顿《新英格兰教育杂志》上发表,现介绍如下。

$\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle C$ 是直角,如图 2-25,作 $BE\perp AB$,取 $BE=AB$,延长 CB 至 D,使 $BD=AC$,连接 ED,则 $ACDE$ 是直角梯形,其面积为 $\frac{1}{2}CD(AC+ED)=\frac{1}{2}(a+b)^2$。又此梯形面积为 $\triangle ABC+\triangle ABE+\triangle BDE=\frac{1}{2}c^2+ab=\frac{1}{2}(a+b)^2$,所以 $\frac{1}{2}c^2+ab=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+ab$,故 $c^2=a^2+b^2$。

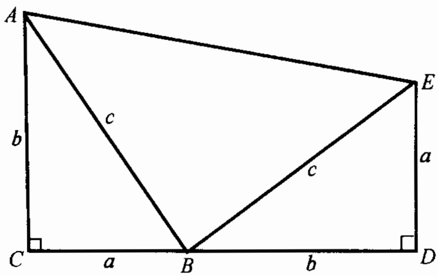

图 2-25

据说总统的这一巧妙证明是他与议员们做数学游戏时想出来的。

法兰西第五共和国总统戴高乐是反法西斯的英雄，他生前生活俭朴，去世后，墓前只有一块小小的墓碑，上刻“戴高乐之墓”，碑的另一面是一个洛林十字架造型。洛林原是法国领土，普法战争后割让给普鲁士，戴高乐生前胸前常佩带一个洛林十字架，不忘收复失地。

洛林十字架如图 2-26 所示，由 13 块 1×1 的小正方形构成。

戴高乐总统解决了如下的等分洛林十字架问题：

用圆规与直尺过 A 点作一直线，把十字架划分成面积相等的两部分。

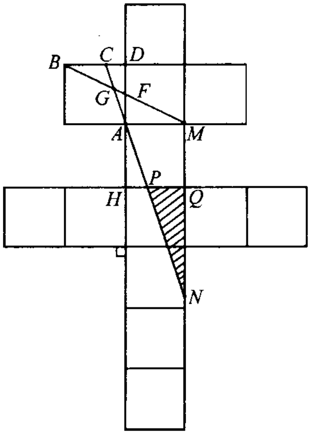

图 2-26

他的做法是：连接 BM，与 AD 交于 F 点，以 F 为圆心，FD 为半径作弧，此弧与 BF 交于 G 点；以 B 为圆心，BG 为半径作弧，此弧与 BD 交于 C 点。连 CA，延长 CA 与十字架边界交于 N 点，CAN 即为所求。

事实上，$\triangle ACD\cong\triangle AHP$，可见在 CAN 右侧的面积是 6 个小正方形加上 $\triangle PQN$ 的面积，只欠证 $\triangle PQN=\frac{1}{2}$。

$$\frac{\triangle ACD\text{ 的面积}}{\triangle PQN\text{ 的面积}}=\left(\frac{CD}{1-CD}\right)^2 \tag{2.2}$$

而 $CD=1-BC=1-BG$，$BG=BF-\frac{1}{2}$，$BF=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$BG=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$CD=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$。

把 $CD=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 代入(2.2)得

$$\triangle PQN\text{ 的面积}=\frac{(1-CD)^2}{2CD}=\frac{1}{2}$$