2.3 蝴蝶定理

1815 年，西欧《男士日记》杂志上刊出一份难题征解，题目如下：

过圆的弦 AB 的中点 M 引任意两条弦 CD，EF，连接 ED，CF 分别交 AB 于 P，Q 两点，求证 $PM = QM$（见图 2-22）。

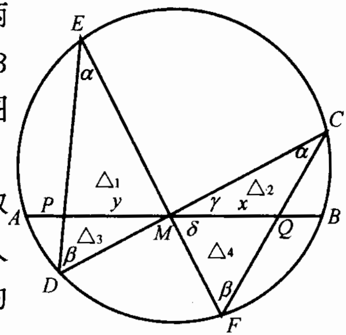

图 2-22

由于图形酷似一只蝴蝶，该命题取名为“蝴蝶定理”。一直过了四年无人作答。1819 年 7 月，一位自学成才的中学数学教师霍纳(W. Horner, 1786～1837)给出第一个证明，但该证明方法繁琐难懂。从 1819 年开始，人们努力寻求简洁易懂的新证明，直到 1973 年，中学教师斯特温(Steven)给出了第一个十分初等、十分通俗的简捷证法，之后，又不断有新的证法发表。

下面介绍斯特温的证明。

令 $MQ = x$，$MP = y$，$AM = BM = a$，$\angle E = \angle C = \alpha$，$\angle D = \angle E = \beta$，$\angle CMQ = \angle DMP = \gamma$，$\angle FMQ = \angle EMP = \delta$。

用$\triangle_1$，$\triangle_2$，$\triangle_3$，$\triangle_4$ 分别代表$\triangle EPM$，$\triangle CQM$，$\triangle DPM$，$\triangle FQM$的面积，则

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2}\cdot\frac{\triangle_2}{\triangle_3}\cdot\frac{\triangle_3}{\triangle_4}\cdot\frac{\triangle_4}{\triangle_1}=\frac{EP\cdot EM\ \sin\alpha}{CM\cdot CQ\sin\alpha}\cdot\frac{MC\cdot MQ\sin\gamma}{PM\cdot DM\sin\gamma}\cdot$$

$$\frac{PD\cdot DM\sin\beta}{FM\cdot QF\sin\beta}\cdot\frac{FM\cdot QM\sin\delta}{EM\cdot PM\sin\delta}=\frac{EP\cdot PD\cdot MQ^2}{CQ\cdot FQ\cdot MP^2}=1$$

由相交弦定理

$$EP\cdot DP=AP\cdot PB=(a-y)(a+y)=a^2-y^2$$

$$CQ\cdot FQ=BQ\cdot QA=(a-x)(a+x)=a^2-x^2$$

由于　$EP\cdot PD\cdot MQ^2=CQ\cdot FQ\cdot MP^2$，得

$$(a^2-y^2)x^2=(a^2-x^2)y^2$$

$$a^2x^2-x^2y^2=a^2y^2-x^2y^2,\ a^2x^2=a^2y^2$$

由于a,x,y皆正数，故得$x=y$，即$MQ=MP$，证毕。

斯特温的证明简捷漂亮之处在于：

①平面几何的综合证法(即“看图说话”的方法，用几何的定理公理来摆事实讲道理)不易下手，改用了代数的方法。

②欲证$x=y$，它们含在四个三角形中，用面积公式$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$把$x$与$y$引入等式之中。

③利用面积公式建立等式时，从一似乎“言之无物”的恒等式$\frac{\triangle_1}{\triangle_2}\cdot\frac{\triangle_2}{\triangle_3}\cdot\frac{\triangle_3}{\triangle_4}\cdot\frac{\triangle_4}{\triangle_1}=1$入手，抄入面积公式时，同一分数的分子分母中 sin 下的角取等角，以便把三角函数约掉，只剩下线段比。

④用相交弦定理把$EP\cdot PD$与$CQ\cdot FQ$化成x,y的表达式。

斯特温的证明通俗到初中的孩子们都能在 5 分钟内看懂的程度，对于这样一个困惑数学家很久的难题，该证明真是漂亮无比。

由于椭圆面是正圆柱面斜截面 2-11。圆柱的底是此椭圆面的投

影,若此椭圆上有一弦 $A'B'$,中点是 M',过 M' 引椭圆两弦 $C'D'$,$E'F'$,连 $E'D'$,$C'F'$ 分别交 $A'B'$ 于 P',Q' 两点,则此带“′”的图形的投影即图 2-22,而且 $MP=MQ$ 当且仅当 $M'P'=M'Q'$,所以蝴蝶定理对椭圆也成立。