2.2 蜂巢颂

18世纪,法国科学家雷奥乌姆尔(Reaumur)和马拉尔蒂(Maraldi)等人认真观测蜂巢,发现它外形是正六棱柱,下底是正六边形,顶部是三个全等的菱形,三个菱形与棱柱轴线成等角,三者彼此斜依而下倾,棱柱侧面皆全等的直角梯形,见图2-20。

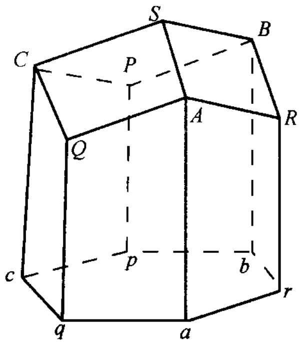

图 2-20

如此精美的蜂房造形,竟出自小小的蜜蜂之口足,实在令人不可

理解，莫非这些可爱的小动物除去勤劳无私、集体观念强、尊老爱幼等君子品质之外，还有非凡的智慧？

欣赏了蜂巢的艺术性之后，科学家在深思这种奇特结构的实用价值，猜想这种蜂房的顶盖设计可能是节省其建筑材料蜂蜡的最佳选择；雷奥乌姆尔就这种猜测请教瑞士数学家、巴黎科学院院士科尼希(Koenig)，科尼希严格证明了人们关于蜂巢最优性的猜测是真的，科尼希的论证如下。

设蜂巢底面的正六边形 $arbpcq$ 边长为 $2e$，则 $ac = ab = bc = 2\sqrt{3}e = AB = AC = BC$ 见图 2-21。

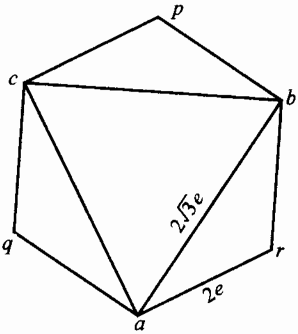

图 2-21

显然平面 ABC // 平面 PQR，设此二平面距离为 x，又 Q 点到平面 ABC 的距离与 S 点到平面 ABC 距离相等，所以 S 到 ABC 的距离也是 x。设菱形对角线 $SP = SR = SQ = 2y$，又 SR 在棱柱轴上投影为 $2x$，SR 在平面 PQR 上的投影为 $2e$，由勾股定理得

$$y^2 = x^2 + e^2 \tag{2.1}$$

设 P'，Q'，R' 分别是 P，Q，R 在平面 ABC 上的投影，则 $AR'BP'CQ'$ 是边长 $2e$ 的正六边形。用 $AR'BP'CQ'$ 做房顶与用蜜蜂的房顶造成的容积是一样的，这是因为蜜蜂在平面 ABC 上侧增加的空间是三棱锥 $S - ABC$，而在平面 ABC 的下侧减少了三个三棱锥 $P - BP'C$，$Q - AQ'C$，$R - AR'B$，这四个三棱锥同高 x，$\triangle BP'C + \triangle AQ'C + \triangle AR'B$ 的面积 $= \triangle ABC$ 的面积。但两种结构的表面积不同，蜜蜂的设计省去了正六边形 $AR'BP'CQ'$ 的面积 $6e^2\sqrt{3}$，以及六个直角三角形 $\triangle PP'B$，$\triangle PP'C$，$\triangle QQ'A$，$\triangle QQ'C$，$\triangle RR'A$，$\triangle RR'B$，这六个三角形面积共计 $6ex$，但增加了三个菱形 $PBSC$，$QCSA$，$RASB$，这三

个菱形总面积为 $6\sqrt{3}ey$，蜜蜂实际节省的面积为

$$6e^2\sqrt{3}+6ex-6e\sqrt{3}y=6\sqrt{3}e^2-6e[y\sqrt{3}-x]$$

为了最大限度地节省屋顶面积，只需让 $\sqrt{3}y-x$ 最小。令 $v=\sqrt{3}x-y$，$u=\sqrt{3}y-x$，则由(2.1)式得

$$u^2-v^2=2(y^2-x^2)=2e^2,\ u^2=v^2+2e^2$$

因 $u=\sqrt{3}y-x>0$，故 $v=0$ 时，即 $y=\sqrt{3}x$ 时，u 取得最小值 $\sqrt{2}e$，这时 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e$；$y=\frac{\sqrt{6}}{2}e$。

下面计算由三个全等棱形来封盖正六棱柱所得的蜂房，容积一定时，为使其表面积最小，各种应有的数据。

$SR=2y=\sqrt{6}e<AB=2\sqrt{3}e$，即 SR 是屋顶菱形的短对角线，于是在 S 点的三个菱形的内角都是钝角。

设 $\angle SAR=2\varphi$，则 $\tan\varphi=\frac{SR}{AB}=\frac{2y}{2e\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan2\varphi=\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}=\sqrt{8}$，$\cos2\varphi=\frac{1}{3}$，$2\varphi=70°32'$，菱形的钝角为 $109°28'$。

下面求出菱形的对角线 SP，SQ，SR 与棱柱轴线所构成的角 μ。显然 $\tan\mu=\frac{2e}{2x}=\sqrt{2}$，由于 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\mu=90°-\varphi=54°44'$。

菱形的面与棱柱横截面所成的角 θ 满足

$$\theta=90°-\mu=\varphi=35°16'$$

梯形 $AarR$ 的锐角 ψ 满足 $\tan\psi=\frac{2e}{x}=2\sqrt{2}=\tan2\varphi$，所以 $\psi=70°32'$，梯形 $AarR$ 的钝角为 $109°28'$。

以 S,P,Q,R 为顶的四个三面角相等。

以 A,B,C 为顶的三个四面角相等。

由于以上所述的三面角相等，四面角相等，以及以 Aa，Rr，Bb，Pp，Cc，Qq 为棱的二面角为 $120°$，所以蜂房上除下底为面的二面角

是 90°外，其余的一切二面角都是 120°。

法国的马拉尔蒂实地测量的结果：

菱形的钝角为 109°28′，锐角 70°32′，与理论结果完全一致，瑞士的科尼希实地测量的结果是：

菱形的钝角为 109°26′，锐角 70°34′，与理论结果只差 2′。

蜜蜂没有计算机，蜜蜂没有设计蓝图，蜜蜂没有指挥施工的工程师，却能营造出与数学家的理论分析一致的最优结构。蜜蜂不仅会酿蜜，而且是天才的建筑师！