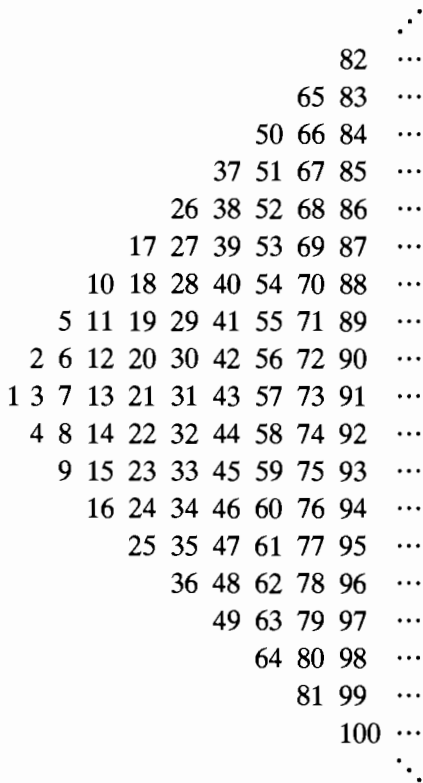


1.14 自然数三角阵揭秘

把自然数集合排列成如下的三角阵, 排列



方式很简单:第1列为1;第2列为2,3,4;第3列为5,6,7,8,9,每列比前一列多排两个数,一列接一列地读下去,恰读出自然数序列,形成一个三角阵,“1当头的行”是此三角阵的对称轴。

这个三角阵里的故事很多,我们仔细观察,就会发现它们:

①每一行和每一斜行相邻两数的差可排成公差是2的等差数列。

例如横行1,3,7,13,21,31,……相邻两数的差的数列是

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots \quad (1.27)$$

斜行3,6,11,18,27,38,51,66,……相邻两数的差的数列是

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots \quad (1.28)$$

式(1.27), (1.28)都是公差是2的等差数列。

②每横行开头是奇数时,全行皆奇数;开头是偶数时,全行皆偶数。

③相邻两列每对左右相邻的数之差是常数。例如17开头和26开头的两列,17与27,18与28,19与29,20与30,……都相差10。

④相邻的两横行上下相邻的两数之差是常数。

⑤斜下方边界上的一行是自然数的平方组成的数列,1,4,9,16,25,……

事实上,它的第 n 个数是这个数所在的一个三角形中最大的数,而这个三角形可以改排成 $n \times n$ 的正方形,所以这个数是 n^2 。

⑥1开头的横行中的数皆形如 $n^2 - n + 1$, n 是该数的项号码。

例如 $1 = 1^2 - 1 + 1$, $3 = 2^2 - 2 + 1$, $7 = 3^2 - 3 + 1$, $13 = 4^2 - 4 + 1$,等等。

事实上,由①,第 n 项为

$$1+2+4+6+\dots+(n-1)2=n^2-n+1$$

⑦1开头的横行中,若视7为第一项,则第 $3k$ 项皆3的倍数, $k=1,2,\dots$

事实上,这种项为 $3k+2$ 号位置,即 $n=3k+2$, n 是此行的项号。由⑥知这种项的值是

$$(3k+2)^2 - (3k+2) + 1 = 9k^2 + 9k + 3$$

所以是 3 的倍数。

⑧在 1 开头的横行中,若视 13 为第一项,则第 $7k$ 项皆 7 的倍数, $k=1, 2, \dots$

⑨在 1 开头的横行中,若视 21 为第一项,则第 $13k$ 项皆 13 的倍数, $k=1, 2, \dots$

一般而言,设 m 是 1 开头的横行中的一个数,它在此行中的项号为 n ,视原第 $n+1$ 项为 ($k=1$) 第一项,则第 mk 项皆 m 的倍数, $k=1, 2, \dots$

事实上,新编号的第 mk 项,相当于原号码的第 $mk+n$ 项,此项的值为

$$\begin{aligned} & (mk+n)^2 - (mk+n) + 1 \\ &= m^2k^2 + 2nmk + n^2 - mk - n + 1 \\ &= (m^2k^2 + 2nmk - mk) + (n^2 - n + 1) \\ &= m^2k^2 + 2nmk - mk + m \end{aligned}$$

此数是 m 的倍数。

即由 1 开头的横行中,每个数的倍数周期性地出现,周期恰为该数本身。

⑩由 1 开头的这一横行中任相邻两数之积仍在此行中,此积在行中的项号是两因数中较小者所在的列的底部的平方数加 1。

例如 $3 \times 7 = 21$, 在此行中,3 的底部是 4, $4+1=5$, 即 21 在第 5 项。

事实上,第 n 位的数是 $n^2 - n + 1$, 第 $n+1$ 位的数是 $(n+1)^2 - (n+1) + 1$, 它们的积为

$$\begin{aligned}
 & [n^2 - n + 1][(n + 1)^2 - (n + 1) + 1] \\
 &= (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) = (n^2 + 1)^2 - n^2 \\
 &= (n^2 + 1)^2 - (n^2 + 1) + 1
 \end{aligned}$$

即此积在第 $n^2 + 1$ 项, 是两个乘数中较小数 $n^2 - n + 1$ 的底部平方数 n^2 加 1。

对其他的横行也可讨论相应的规律。

这个三角阵写起来倒是容易, 它身上却包藏了如此之丰富的规律性; 再回想我们随手写出的一个高次代数方程, 写起来当然只是举手之劳, 但讨论它是否有实根等问题时, 却不是等闲之事了; 还有, 我们随便写一个函数值, 例如 $\sin\alpha$, $\lg A$, α , A 是给定正数, 怎样判定它是无理数还是有理数呢?

貌似平凡简单的事物当中往往含有深刻复杂的数学内容, 数学家不愁无事可干。