# 6.13 理发师悖论与第三次数学危机

1919 年，科学家罗素提出如下的理发师悖论：

“村子里仅一名理发师，且村子里的男人都需要刮胡子，理发师约定：给且只给自己不给自己刮胡子的人刮胡子。”

有好事者问理发师：“理发师先生，你自己的胡子谁来刮？”

理发师无言以对。因为如果理发师说“我自己的胡子自己刮”，

那么根据他与大家的约定，理发师不能给自己刮胡子的人刮胡子，即这时他不该给自己刮胡子；如果理发师说"我的胡子不自己刮"，那么根据他与大家的约定，理发师应给自己刮胡子。可见理发师怎么回答也不行！

上述理发师悖论可以稍微数学化地来表述，设集合

$$B=\{\text{自己刮胡子的人}\}$$

若理发师$\in B$，即理发师是自己刮胡子的人，但由"约定"，他不该给理发师刮胡子，即理发师$\notin B$，矛盾！若理发师$\notin B$，即理发师不自己刮胡子，由"约定"，他应给自己刮胡子，即理发师$\in B$，矛盾！

罗素进一步把上述理发师悖论变成下面的一个数学悖论，称为罗素悖论：

"设 $B=\{\text{集合 }A \mid A\notin A\}$，问 $B\in B$ 还是 $B\notin B$？"

显然 $B\neq\varnothing$；若 $B\in B$，由 $B$ 的定义，$B$ 是$B$ 中一元素时，$B$ 应有性质$B\notin B$，矛盾！若 $B\notin B$，由 $B$ 的定义，$B\in B$，矛盾！于是这里发生了无论如何摆脱不了矛盾的荒唐局面！

在罗素表述悖论时，字字句句都未违反康托尔朴素集合论的观点，为什么出现了自相矛盾的事呢？要害是允许写 $B\in B$，即谈某些集合自己是自己的元素，亦即允许我们前面提出的"皮囊悖论"的存在；为了排除罗素悖论，保卫已建成的数学大厦，数学家策墨罗(Zermelo)、弗兰克尔(Freenkel)等抛出一套所谓公理集合论的公理系统，按他们的公理规定，禁谈 $B\in B$，从而解除了第三次数学危机。

第三次数学危机出现的前夕，数学界一派升平乐观气氛，1900年，庞加莱在第二次国际数学家大会上自信而兴奋地宣称："我们可以说，现在的数学已经达到了绝对的严格。"过不了几年，罗素悖论犹如晴天霹雳，使数学界一片哗然，希尔伯特惊呼："在数学这个号称可靠性与真理性的模范里，每个人所学、所教、所用的概念及结构和推理方法，竟导出不合理结果；如果数学思考也失灵的话，那么我

们到哪里去找可靠性和真理性呢?”

第一次、第二次和第三次数学危机的出现和排除使数学家们对数学的认识更为清醒了,人们有了思想准备,也许还有第四次、第五次数学危机乃至第 $n$ 次($n \geqslant 3$);但可以相信,人类有能力排除任何数学危机,而且,每次数学危机爆发之日,就是新的数学概念、新的数学理论孕育之时,随着危机的排除,数学则会得到划时代的进展与突破。