1.13 算术小魔术

(1) 立方和等于和平方

法国著名数学家刘维尔(J. Liouville, 1809~1882)说:4 的因数有 1, 2, 4, 这些因数的因数个数分别是 1, 2, 3, 再看 $1^3+2^3+3^3=1+8+27=36=(1+2+3)^2$, 这恰为公式

$$(1+2+3+\cdots+n)^2=1^3+2^3+\cdots+n^3$$

的特例。一般而言, 任取一自然数 N, 它的因数有 $1, n_1, n_2, \cdots, n_k, N$, 这些因数的因数个数分别为 $1, m_1, m_2, \cdots, m_k, k+2$, 是否公式

$$\begin{aligned}&1^3+m_1^3+m_2^3+\cdots+m_k^3+(k+2)^3\\&=(1+m_1+m_2+\cdots+m_k+k+2)^2\end{aligned}$$

成立!

下面把上述“戏法”表演如下:

1:因数为 1;因数的因数个数为 1

$$1^3=1^2$$

2:因数为 1, 2;因数的因数个数分别为 1, 2

$$1^3+2^3=9=(1+2)^2$$

3:因数为 1, 3;因数的因数个数分别为 1, 2

$$1^3+2^3=(1+2)^2=9$$

5:因数为 1, 5;因数的因数个数分别为 1, 2

$$1^3+2^3=(1+2)^2=9$$

6:因数为 1, 2, 3, 6;因数的因数个数分别为 1, 2, 2, 4,

$$1^3+2^3+2^3+4^3=81=(1+2+2+4)^2$$

我们发现, 上述规律对素数 p 是永远成立的, 事实上, 素数 p 的因数为 1 与 p, 因数的因数个数分别为 1, 2, $1^3+2^3=(1+2)^2=9$。

下面只对合数来验证。

8： 因数为 1, 2, 4, 8；因数的因数个数分别为 1, 2, 3, 4

$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2=100$$

100： 因数为 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100；因数的因数个数分别为 1, 2, 3, 2, 4, 6, 3, 6, 9

$$1^3+2^3+3^3+2^3+4^3+6^3+3^3+6^3+9^3$$

$$=1+8+27+8+64+216+27+216+729=1296$$

$$(1+2+3+2+4+6+3+6+9)^2=1296$$

(2) 6174 号陷阱

任取一个四位数 $A_1A_2A_3A_4$，A_1，A_2，A_3，A_4 不全相等，用 A_1，A_2，A_3，A_4 这 4 个数字排出一个最大四位数，再排出一个最小自然数，对两者之差再重复这种操作，结果如何？

1234： 用 1, 2, 3, 4 组成的最大的数为 4321，最小的数为 1234，差为

$$4321-1234=3087$$

3087： 重复上述操作得

$$8730-378=8352$$

8352： 重复上述操作得

$$8532-2358=6174$$

6174： 重复上述操作得

$$7641-1467=6174$$

再重复进行上述操作，永远得出 6174，至此已落入“6174 号陷阱”！ 6174 成了“不动点”。

再看 9990

9990： $9990-999=8991$

8991： $9981-1899=8082$

8028： $8820-288=8532$

8532： $8532-2358=6174$

经上述四步即掉入 6174 号陷阱。

最后再看一个实例 8964：

$$
\begin{aligned}
8964:&\quad 9864-4689=5175\\
5175:&\quad 7551-1557=5994\\
5994:&\quad 9954-4599=5355\\
5355:&\quad 5553-3555=1998\\
1998:&\quad 9981-1899=8082\\
8082:&\quad 8820-288=8532\\
8532:&\quad 8532-2358=6174
\end{aligned}
$$

经七步终于掉入 6174 号陷阱。

可以证明最多经过七步，运算结果必掉入 6174 号陷阱，即任意四位数，只要其数字不全相等，则“由这四个数字组成的最大数与最小数之差”的反复操作，在七步之内必得出 6174，之后再执行上述运算，则永远得出 6174。上述实例 8964 已是最复杂的陷阱了(要经过七步才陷入)。

(3) 数字的平方和非 1 则 4

任取定一个自然数，求其数字平方和，再求所得结果的数字平方和，反复执行，最终结果是几？

1： $1^2=1$

2： $2^2=4, 4^2=16, 1^2+6^2=37, 3^2+7^2=58, 5^2+8^2=89,$

$8^2+9^2=145, 1^2+4^2+5^2=42, 4^2+2^2=20, 2^2+0^2=4$

可见从 2 开始，会反复(周期地)出现结果 4 和 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20 的循环。

3： $3^2=9, 9^2=81, 1^2+8^2=65, 6^2+5^2=61,$

$1^2+6^2=37$

从此进入从 2 开始的运算，可见从 3 开始，会进入 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20 的循环。

看一个较大数 12345678：

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2=1+4+9+16+25+36+49+64=204$$

$2^2+4^2=20$，从此进入从 2 开始的过程，变成 4，16，37，58，89，145，42，20 的循环。

可以证明最终结果对任何自然数不是 1 就是 4，16，37，58，89，145，42，20 的循环。

结果为 1 的实例也不少，例如非零数字是一个 6 与一个 8 的自然数或非零数字是四个 5 的自然数。

(4) 外接正方形四个顶点皆为零

作一个正方形的外接正方形，使两者的边呈 45° 角，再如此依次作外接正方形，如图 1-3。我们首先在原始正方形的四个顶点任意写上四个自然数，在其外接正方形的每个顶点上写出它与其内接正方形相邻的顶上数字之差的绝对值，如此递推，有限次之后，则会出现外接正方形四个顶上皆为零的结果。

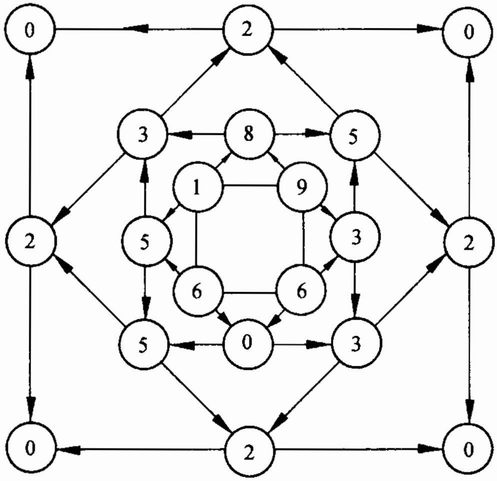

图 1-3

例如原始正方形四顶上写的是1966,经过四轮演化,最后四顶处皆变成零!见图1-3。

不信,你在原始正方形的四角顶任意写别的自然数,例如1,9,8,9试试看,也会是零结果。

以上四个小魔术的证明不是很难,动点脑筋,+,-,×算一算而已,有时间的读者可以自己写出证明。