6.3 无理数神出鬼没，数不胜数

无理数也有无穷多个，例如

$$0.112123\cdots\underbrace{123\cdots k}_{k\text{个相异数}}\cdots \tag{6.3}$$

是一个无理数 α_1，它无限又不循环。若把(6.3)中的数字 1 全擦掉则得 α_2，α_2 也是无理数，把 α_2 中的数字 2 全擦掉，则得无理数 α_3，如此可以得出无穷个无理数，这部分无理数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots\cdots$ 与全体有理数可以一一对应，α_1 与 0 号有理数是一对儿，α_2 与 1 号有理数一对儿，$\cdots$，α_{k-1}与 k 号有理数是一对，可见无理数的一部分已经和全体有理数一样多。

无理数集合中的元素不可编号。这只需证明$(0,1]$中的实数不可编号。用反证法，若可以把$(0,1]$中的实数编号成 $t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$，其中

$$t_1=0.t_{11}t_{12}t_{13}\cdots$$

$$t_2=0.t_{21}t_{22}t_{23}\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$t_n=0.t_{n1}t_{n2}t_{n3}\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

其中 $t_{ij}\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，$i,j$ 是自然数，且每个 t_i 中的右端有无限个数字不是零。例如 0.5 则写成 $0.499\cdots9\cdots$。观察对角线上的数字列 $t_{11},t_{22},\cdots,t_{nn},\cdots$，取

$$a_i=\begin{cases}2, & t_{ii}=1\\ 1, & t_{ii}\neq 1\end{cases}$$

则十进小数

$$a=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\in(0,1]$$

且 $a\notin\{t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots\}$，此与$(0,1]$中的全集实数是$\{t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots\}$矛盾，可见$(0,1]$内的全体实数不可编号。

若$(0,1]$中全体无理数可以编号为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\cdots$，又知$(0,1]$中的全体有理数可以编号为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n,\cdots$，考虑数列

$$\gamma_1, \beta_1, \gamma_2, \beta_2, \cdots, \gamma_k, \beta_k, \cdots \tag{6.4}$$

则(0, 1]中的全体实数可按(6.4)的次序编码, 与上述证明出的事实相违, 至此知(0, 1]中的全体无理数进而实数集中的全体无理数不可编号。

无理数们的这种不可数性是它们的一种"无理"表现。从无理数不可数(编号)可知无理数比有理数多得多, 通俗地说, 有理数可以一个一个地数, 而无理数则多得数不胜数。