4.12 投票排列名次是否公正

民主和科学是人类文明的重要标志,在日常生活、体育文娱比赛和国家政治生活当中,民主评议与民主选举是人们十分关心的热点问题。

例如,甲乙两名运动员,进行同一项比赛,甲乙实力相当时,约定记成甲=乙,甲优于乙,则记成甲>乙。有评委若干人,要求评委们集体地对若干运动员按优劣排序,应该用什么办法进行排序?排出的名次是否公正?

设评委集合为$J=\{1,2,3,\cdots,n\}$,运动员集合为$S=\{a,b,c,\cdots\}$,记j评委投票排出的序为$p(j),j\in J$。

显然有下列共识:

①对任意两个运动员$x,y\in S$,$x>y$,$x=y$,$x<y$中仅有一种关系成立。

②当$x\geqslant y,y\geqslant z$时,$x\geqslant z$,且仅当$x=y,y=z$时,$x=z$,其中$x,y,z\in S$。

集中各评委意见,最后选举结果的排序若按少数服从多数的民主精神,应如下进行:

$x,y\in S$,在所有投票$p(j)(j=1,2,\cdots,n)$当中,仅当$x>y$出现的次数超过$\frac{n}{2}$时,判定$x>y$。

但这种貌似公正的选举有时会得不出公正的结果,例如

$$J=\{1,2,3\},\quad S=\{a,b,c\}$$
$$p(1)=abc,\ p(2)=bca,\ p(3)=cab$$

在$p(1),p(2),p(3)$当中,$a>b$发生两次,过半数,应判$a>b$;$b>c$也发生两次,过半数,应判$b>c$;$c>a$也发生两次,过半数,应判$c>$

a。这就不能裁决 a,b,c 的名次了！

为了使得判决更有说服力，如下计算各运动员的实力：设 $B_j(x)$ 是 $p_{(j)}$ 中 $<x$ 的元素的个数，即 $p_{(j)}$ 这张票上排在运动员 x 之后的运动员的个数，应该说比 x 差的运动员越多，x 越强。令

$$B(x) = B_1(x) + B_2(x) + \cdots + B_n(x)$$

$B(x)$ 就是 x 的集体评判实力，$B(x)$ 越大，x 越强，仅当 $B(x)>B(y)$ 时，判 $x>y$。

但这种凭 $B(x)$ 的大小来裁判的办法，有时也会出现令人不服气的判决，例如

$$J = \{1,2,3,4,5\},\ S = \{a,b,c,x,y,z\}$$

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = xyzabc,\ p(5) = yzabcx,$$

则统计出 $B(x)=5+5+5+5=20$，$B(y)=4+4+4+4+5=21$，结果判定 $y>x$，x 不服，x 说："我优于 y 四次，而 y 优于我仅一次，怎么说我次于 y 呢！"

当然上面的少数服从多数以及以 $B(\cdot)$ 的大小论优劣的方法多数情况下还是可以得出合理裁决的。为了克服它们的缺点，人们又寻找更科学的排名规则。

1951 年，阿荣(Arrow)提出四条大家都认为是公平的所谓"选举公理"。

公理 1　对每对运动员 $x,y\in S$，存在一种投票与判决，使得 $x>y$ 公正。

这条公理在选举结果公布之前是不会有人反对的，例如在每个 $p(j)$ 中，皆有 $x>y$，判 $x>y$ 当然公正。

公理 2　若第一次投票判决了 $x>y$，第二次再投票表决一次，第二次投票中所有的 $p(j)$ 中，x 的序号都未比第一次投票时增大，其他运动员次序不变，则第二次仍判 $x>y$。

这条公理是说 x 在第二次投票中，在评委的心目中其相对地位

并未变低,甚至有所提高,则第二次的判决对 x 而言不会比第一次差,仍然是 $x>y$。

公理 3 $S_1 \subseteq S$,在两次投票当中,每个评委对 S_1 中运动员之间的排序不变,则两次判决中,S_1 中各运动员间的先后次序不变。

这一公理是说,既然每个评委两次投票对一部分运动员之间的先后次序都保持不变,那么仅就这部分运动员而言,两次判决的结果中,他们之间的排序也不会变动。

公理 4 对任何一对运动员 $x, y \in S$,仅当 $p(k)$ 中 $x>y$ 时才有最后判决 $x>y$,则应把 k 从评委中清除,即 $k \notin J$。

公理 4 是说,如果每对运动员谁优谁劣,别的评委说话不算数,只听 k 号评委一人的意见,事实上,k 恰似秦始皇之流的独裁者,在当今的讲民主讲人权的世界潮流之中,这种独断专制的独裁者必须推翻。

下面讨论在遵循以上四条选举公理的选举中,结果是否公正。

当仅有两名运动员时,且评委不少于两名,“少数服从多数”的选举规则显然满足公理 1 到公理 4。事实上,当所有评委都评 $x>y$,即所有 $p(j)$ 中都是写的 $x>y$,则必须判定 $x>y$;即存在一种投票与判决,使得 $x>y$ 公正,公理 1 满足。因为仅两个候选人,所以公理 2 与公理 3 显然满足。设只有 $p(i)$ 一张票中 $x>y$,但 $p(j)$ 中皆 $x<y$, $i \neq j$;按少数服从多数的原则,不采纳 i 的意见,判 $x<y$,即公理 4 满足。但对候选人多于两个,且评委至少两名的情形,却有下面令人惊讶的结论:

当运动员不少于三名,评委不少于两名的情形,不存在满足公理 1 至公理 4 的评比排序规则。

这一结论无非是说,如果认为只有满足公理 1 至公理 4 的评比排序才是公正的,那么没有公正的评比。

事实上,若 $x, y \in S$, $J_0 \subseteq J$,只要对每个 $j \in J_0$, $p(j)$ 中 $x>y$,则判决 $x>y$,这时称 J_0 是 x, y 的“决定集”。决定集是存在的,J 就

是最大的决定集。可见 x,y 的决定集乃是一种“集体独裁”，即不管 J_0 之外的评委如何反对，只要 J_0 中的评委一致说 x 优于 y，则裁决 x 优于 y。这也就是说，决定集 J_0 是这种集合，对一切 $j\in J_0$，$p(j)$ 中皆 $x>y$，而对一切 $j\in J-J_0$，$p(j)$ 中皆 $x<y$，但仍判决 $x>y$。由此可以推导出：

若 J_0 是人数最少的决定集，则 J_0 中只有一位评委，于是独裁者不可避免！

事实上，若 J_0 是人数最少的决定集，但 $|J_0|>1$，设 $j\in J_0$，则 $J_0-\{j\}\neq\varnothing$，若 J_0 是 x,y 的决定集，设

$$p(j)=xyz;p(i)=zxy,i\in J_0-\{j\}$$

$$p(l)=yzx,l\in J-J_0$$

由于 J_0 是 x,y 的决定集，则应有 $x>y$；如果判 $z>y$，则 $J_0-\{j\}$ 是 y 与 z 的决定集，与 J_0 是最小决定集相违，所以这时必须判 $y\geqslant z$。于是有判决 $x>y\geqslant z$，从而 $x>z$，此表明 $\{j\}$ 是 x,z 的决定集，与 J_0 是最小决定集相违，所以 $|J_0|$ 不能大于 1，J_0 只一位评委 j 组成。j 岂不成了独裁者！ 此违反了公理 4，可见阿荣选举公理也有自相矛盾的可能。

我们看到，如果仅仅谈谁优谁劣，按各评委的选票排序，有时很难做到合理公正，如果把候选人各方面的表现加权打分，就公正合理得多了。

例如某校有四位候选人竞选校长，选民对他们的领导才能、学问人品、年龄身体三个主要方面进行打分，选举委员会对每个候选人的三个方面用计算机算出平均分数，再通过民意测验定出对于一个校长而言人品学问、年龄身体、领导才能的重要性所占的比重百分比，见图 4-21，“身”代表年龄身体，“品”代表学问人品，“能”代表领导才能，图 4-21 中由校长中经身品能到甲有三条轨道，把每一轨上的分(权)数相乘，三个积相加则是甲的综合得分。对乙、丙与丁也

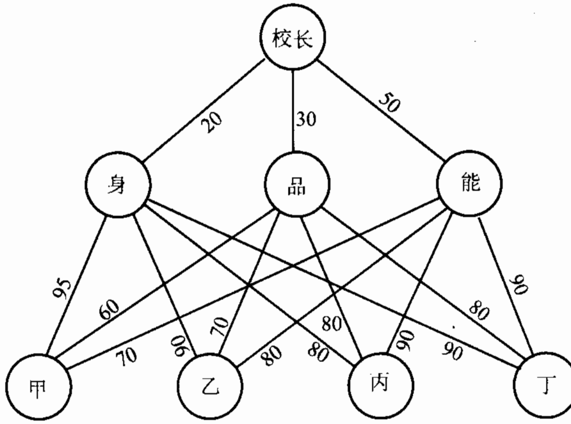

图 4-21

仿照甲得出综合得分

$$
\begin{aligned}
甲 &= 95 \times 20 + 60 \times 30 + 70 \times 50 \\
&= 1900 + 1800 + 3500 \\
&= 7200 \\
乙 &= 90 \times 20 + 70 \times 30 + 80 \times 50 \\
&= 1800 + 2100 + 4000 = 7900 \\
丙 &= 80 \times 20 + 80 \times 30 + 90 \times 50 \\
&= 1600 + 2400 + 4500 = 8500 \\
丁 &= 90 \times 20 + 80 \times 30 + 90 \times 50 \\
&= 1800 + 2400 + 4500 \\
&= 8700
\end{aligned}
$$

丁的综合得分最高,丁当选本届校长。

这种分层次加权,分析综合的“层次分析”方法,还可用于填报高考志愿、选购商品、为运动员或演员打分等实际活动中的评比排序。