1.10 韩信点兵，多多益善

《孙子算经》成书于公元 3 世纪前后，魏晋时期著名数学家刘徽曾为《孙子算经》作注，原始作者已不可考，书中有两则“妇孺皆知而乐道之”的名题，一题称为“物不知其数”，一题则是“韩信乱点兵”。“物不知其数”的解决总结出在世界数学史上影响深远的“中国剩余定理”或称“孙子定理”，比内容相同的“高斯定理”早问世 1500 年左右。

南宋大数学家秦九韶(约公元 1202～1261)在他的巨著《数书九章》中又提出一个脍炙人口的“余米推数”问题，并总结出“大衍求一术”。

秦九韶字道古，四川安岳人，曾在川、皖等地为官，1260 年贬至广东梅州，次年卒于任所。他博学多才，史称秦九韶“性极机巧，星象、音律、算术以至营建等事，无不精究。”“戏、球、马、弓、剑莫不能知”，尤其是在南宋兵荒马乱的年代，潜心研究数学，实为难能可贵。20 多万字的《数书九章》是他 1244～1247 年为母亲守孝期间写成的，该书立论新颖，构思风趣，是我国乃至世界的数学瑰宝。美国数学史家萨顿(G. Sarton，1884～1956)说，秦九韶是“他的民族，他的时代，以致一切时期最伟大的数学家之一。”

(1) 物不知其数与中国剩余定理

题曰:“今有物不知其数,三三数之余二,五五数之余三,七七数之余二,问物几何?”

宋朝时有歌谣口诀称:

三岁孩儿七十稀,
五留廿一事尤奇,
七度上元重相会,
寒食清明便可知。

其中的上元指正月十五元宵节,寒食至清明105天。

明朝程大位的歌诀则唱道:

三人同行七十稀,
五树梅花廿一枝,
七子团圆正月半,
除百零五便得知。

这两首歌谣给出的一个有效算法为:

用70乘三三数的余数,用21乘五五数之的余数,用15乘七七数之的余数,再把三个积相加,减去105的若干倍,即可得所求的数的最小值

具体计算过程是

$$2\times70+3\times21+2\times15=233$$

$$233-105=128,128-105=23$$

23即所求的物件的数目(的最小值)。

事实上,23加上105的任一倍数,亦为所求,105是3,5,7的最小公倍数,$105=3\times5\times7$,如果已求出一数M,满足被3除余2,被5除余3,被7除余2,则$M-105k$仍然有上述余数,所以有第四句“除百零五便得知”,这里的“除”字是删除,即减去的意思。

在$2\times70+3\times21+2\times15$式中,$3\times21$中的$21=3\times7$,$2\times15$中的$15=3\times5$,所以$3\times21+2\times15$可被3除尽,$2\times70$中的$70=2\times(5$

$\times 7$)，被 3 除恰余 2，所以 $2\times 70+3\times 21+2\times 15$ 被 3 除余 2，相似地可以看出此式被 5 除余 3，被 7 除余 2。所以 $2\times 70+3\times 21+2\times 15$ 是所求之数。用同余的记号写，即

$$70\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3),\ 21\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5),\ 15\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$$

此实例总结成如下的孙子定理：

设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是两两互素的正整数，$m=m_1m_2\cdots m_k$，$m=m_iM_i$，$i=1,2,\cdots,k$，则满足下列方程

$x\equiv b_1(\mathrm{mod}\ m_1), x\equiv b_2(\mathrm{mod}\ m_2), \cdots, x\equiv b_k(\mathrm{mod}\ m_k)$的解为

$$x\equiv M'_1M_1b_1+M'_2M_2b_2+\cdots+M'_kM_kb_k(\mathrm{mod}\ m)$$

其中 $M'_iM_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ m_i)$，$i=1,2,\cdots,k$。

在“物不知其数”一题中，$m_1=3$，$m_2=5$，$m_3=7$，$k=3$，m_1, m_2, m_3两两互素，即每两个都没有不为 1 的公因数。$m=m_1m_2m_3=3\times 5\times 7=105$，$105=m_1M_1$，故 $M_1=35$，$105=m_2M_2$，故 $M_2=21$，$105=m_3M_3$，故 $M_3=15$。又要求 $M'_iM_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ m_i)$；$35M'_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$，故 $M_1'=2$，$21M'_2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$，则 $M'_2=1$，$15M'_3=1(\mathrm{mod}\ 7)$，故 $M'_3=1$，于是

$$x\equiv 2\times 35\times 2+1\times 21\times 3+1\times 15\times 2\equiv 233\equiv 23(\mathrm{mod}\ 105)$$

用《孙子算经》的这种算法，还可解决韩信点兵问题。

(2) 韩信乱点兵

据司马迁《史记》：“淮阴侯列传第三十二”与“韩信卢绾列传第三十三”载，“韩信者，淮阴人也，始为布衣时，贫无行，不得推择为吏，又不能治生商贾，常从人寄食饮，人多厌之。”足见其贫贱之身世，被人欺凌，受过“胯下之辱”，后发奋习武，熟读兵书，成为统率刘邦全军的元帅，助佐刘邦得天下，可恨刘邦过河拆桥，欲车裂韩信，韩信留下“狡兔死，走狗烹；高鸟尽，良弓藏，敌国破，谋臣亡”的千古哀怨！帝王之中，有几个不是无赖?！假设韩信自幼立志于数学，也许会对人类做出更大的贡献。下面是《孙子算经》上所载“韩信乱点兵”的名

题：

韩信有兵一队，若列为五行纵队，则末行一人，成六行纵队，则末行五人，成七行纵队，则末行四人，成十一行纵队，则末行十人，求兵数。

军师答曰："两千一百一十一人或加若干倍的两千三百一十人。"韩信答曰："多多益善！"

韩信点兵的数学模型是求下列方程的解

$x\equiv 1(\bmod 5)$，$x\equiv 5(\bmod 6)$，$x\equiv 4(\bmod 7)$，$x\equiv 10(\bmod 11)$

按孙子定理的记号，$m_1=5$，$m_2=6$，$m_3=7$，$m_4=11$，m_1，m_2，m_3，m_4 两两互素，$m=5\times6\times7\times11=2310$，$M_1=6\times7\times11=462$，$M_2=5\times7\times11=385$，$M_3=5\times6\times11=330$，$M_4=5\times6\times7=210$，又要求 $M'_iM_i\equiv 1(\bmod m_i)$，$i=1,2,3,4$，得 $M'_2=M'_3=M'_4=1$，$M'_1=3$，$b_1=1$，$b_2=5$，$b_3=4$，$b_4=10$，于是

$$\begin{aligned}x&\equiv M'_1M_1\times1+M'_2M_2\times5+M'_3M_3\times4+M'_4M_4\times10\\&\equiv 462\times3\times1+1\times385\times5+1\times330\times4+1\times210\times10\\&\equiv 1386+1925+1320+2100\\&\equiv 6731\equiv 2111(\bmod 2310)\end{aligned}$$

即韩信的兵有 $2111+k2310$，k 是非负整数。

(3) 余米推数

题曰："米铺被盗，去米一般三箩，皆适满，不记细数。今左壁箩剩一合，中壁箩剩一升四合，右壁箩剩一合。后获贼系甲乙丙三人，甲称当夜摸得马杓，在左壁箩舀入布袋；乙称踢着木履，在中壁箩舀入袋；丙称摸得漆碗，在右壁箩舀入袋，将归食用，日久不知数。索到三器，马杓容满一升九合，木履容一升七合，漆碗容一升二合，欲知所失米数，计赃结断，三盗各几何？"

"合"读 gě(同音葛)，十勺为一合，十合为一升；量米器具，由竹木制成，方形或筒形，装满粮食恰为一合。

用现代汉语来讲，题文为："一米店被盗，米店原有三个装满米的箩，三个箩容量相等，被偷后，左边箩里剩下一合米，中间箩里剩下一升四合米，右边箩里剩下一合米。后把甲乙丙三个小偷抓获，甲供认当夜摸到一只马杓，从左边箩里把米舀入他的布袋；乙供认踢着了一只木鞋，就用木鞋从中间箩里把米舀入他的布袋；丙供认他摸到一只漆碗，用此碗把右边箩里的米舀入他的布袋。三个小偷把盗得的米背回各自的家中食用，他们也糊里糊涂，不知当初偷来了多少米。后经判官索验物证，查明那只马杓可容一升九合，木鞋可容一升七合，漆碗可容一升二合，于是按每个小偷盗去的米的数量给予应得之惩处。问三人各偷去多少米?"

此题的数学模型是：设 x 是箩的容量，以合为单位，欲求的是下面方程的解

$$x \equiv 1 \pmod{19},\ x \equiv 14 \pmod{17},\ x \equiv 1 \pmod{12}$$

引用孙子定理的记号，$m_1 = 19$, $m_2 = 17$, $m_3 = 12$, m_1, m_2, m_3 两两互素；$m = m_1 m_2 m_3 = 3876$, $M_1 = 204$, $M_2 = 228$, $M_3 = 323$, $M_1' = 15$, $M_2' = 5$, $M_3' = 11$, $b_1 = 1$, $b_2 = 14$, $b_3 = 1$。于是

$$\begin{aligned} x &\equiv M_1 M_1' \times 1 + M_2 M_2' \times 14 + M_3 M_3' \times 1 \\ &= 3060 + 15960 + 3553 \equiv 22573 \equiv 3193 \pmod{3876} \end{aligned}$$

即每箩至少装米 3193 合，甲盗走的米为 $3193 - 1 = 3192$ 合，乙盗走的米为 $3193 - 14 = 3179$ 合，丙盗走的米为 3192 合。三个小偷盗走的米都不少，也差不太多，应各打四十大板，并处相当于 3000 多合米的罚金。