# 1.1 从 2 + 2 = 4 谈起

一位聪明天真的小朋友问他的妈妈:“为什么 2 加 2 等于 4?”妈妈答:“傻孩子,连这么简单的算术都不懂!”于是这位母亲伸出左手的两个指头,又伸出右手的两个指头,左右的两个指头往一起一并,说:“这就叫 2 加 2,你数一数,看是不是 4?”孩子勉强点头,接着又问:“可是 4 是什么玩意儿呢?”妈妈欲言而无语。是呀,如果母亲说这些指头的数目就叫做 4,孩子再追问什么叫做 999999999,那可就不好用指头之类的东西来比划着解释了!

事实上,反思我们小时候对加法的学习,确实是非理性的,完全是老师和家长向我们的脑子里灌进去而记住了的七加八一十五,七加五一十二之类的指令而已;认真思考起来,究竟每个自然数是如何定义的,加法是什么,为什么 $2+2=4$, $4+4=8$, 等等,确实是一个严肃的数学问题。

原始人已有自然数的原始概念,他们用小石头来记录捕捉的猎物的个数(或用“结绳记事”法)。有人捕来一只野兔,他们就在小坑

里放上一颗石子，又有人捕来一只野兔，他们就在小坑中又投放一颗石子，等等。事实上，这逐一地向小坑中投石子的过程恰是加法运算的真谛，投一颗石子就叫做加上1，1加1得到的数量就叫做2，2再加1得到的数量就叫做3，等等。再后来，人们发现了加法的结合律，即$1+1+1+1=(1+1)+(1+1)$，等等。公元6世纪，印度数学家引入零的符号“0”，它是自然数的“排头”。到了19世纪，皮亚诺(G. Peano, 1858～1932)提出了五条算术公理，才从理论上彻底解决了什么是自然数，为什么$2+2=4$等数学上的这些基本问题，他的三个概念与五个公理是：

0，后继和自然数，以及如下五条公理：

**公理1**　0是自然数。

**公理2**　任何自然数的后继是自然数。

**公理3**　0不是任何数的后继。

**公理4**　不同的自然数后继不同。

**公理5**　对于某一性质，若0有此性质，而且若某自然数有此性质时，它的后继也有此性质，则一切自然数都有此性质。

具体地说，0的后继中国人叫做一，美国人叫做one，1的后继中国人叫做二，美国人叫做two，等等。第五公理谈的是数学归纳法。一个自然数生出它的后继的过程是加法，记成$0+1=1$，$1+1=2$，$2+1=3$，$3+1=4$，$n+1=(n+1)$，等等。

由皮氏的公理可以明确无误地回答什么是自然数的问题，例如4是什么？答：4是3的后继，或曰4是3之“子”，3呢？3是2的后继，2呢？2是1的后继，1呢？1是0的后继，0呢？0是祖宗，它不是谁的后继，是自然数的发源点。

$2+2=4$证明如下：

因为$1+1=2$，所以$2+2=(1+1)+(1+1)$，由结合律得

$$2+2=(1+1)+(1+1)=(1+1+1)+1$$

又因 $1+1+1=(1+1)+1=2+1=3$
所以 $2+2=3+1$，而 $3+1=4$，故知 $2+2=4$ 是正确的。

证毕。

有了加法的概念，减法是加法的逆运算，乘法则是几个相同的数连加的“简写”，除法是乘法的逆运算。可见，从皮氏公理出发已经把 $+\ -\ \times\ \div$ 的概念弄得水落石出，不再是那种原始的直观感觉（例如结绳记事）或死记的九九表了。

查阅《现代汉语词典》上加法词目，词典称：“加法 jiāfǎ，数学中的一种运算方法，两个或两个以上的数合成一个数的方法。”这种解释实在科学，例如它只说“合成一个数”，并不说这个数（我们称其为和）是多少。事实上，现代数学对于 $1+1$ 的和未必总是算出 2 来的。遥想原始人怎样形成数量的概念，最初只是“有”与“无”两个概念，他们尚没有“多少”的概念和斤斤计较的坏习气。就是现代，有时也只需考虑有与无，是与否，而不必细说有多少，例如我们要写字，关心的是有笔还是没有笔，至于有笔时有几枝，那都是一回事。如果这时规定 0 代表无（或否），1 代表有（或是），则应有 $0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，$1+1=1$。这个 $1+1=1$ 的算式有点不习惯，但对于此处的实际背景，如此定义加法是再合适不过了。这种 $1+1$ 不等于 2，而等于 1 的加法称为“逻辑和”，$1+1=1$，于是 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 个 }1}=1$（$n$ 是自然数）。

再看电视机开关，你用指头捅一下，它就为你播放节目，再捅一下，它就关机了，如果把关机状态记成 0，把播放状态记成 1，则有加法法则：

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+0=1$$
$$1+1=0$$

$63 \times 15873 = 999999$

道理：$111111 \div 7 = 15873$

(4) $(1+2+1) \times 121 = 22 \times 22$,

$(1+2+3+2+1) \times 12321 = 333 \times 333$,

$(1+2+3+4+3+2+1) \times 1234321 = 4444 \times 4444$,

$(1+2+3+4+5+4+3+2+1) \times 123454321$

$= 55555 \times 55555$,

$(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1) \times 12345654321 =$

$666666 \times 666666$,

$(1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1) \times$

$1234567654321 = 7777777 \times 7777777$,

$(1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1) \times$

$123456787654321 = 88888888 \times 88888888$,

$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+$

$1) \times 12345678987654321 = 999999999 \times 999999999$

道理：

$$[1+2+3+\cdots+(n-1)]+n+[(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1]$$

$$=\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}+n+\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$$

$$=n^2$$

所以 $1+2+1=2^2, 1+2+3+2+1=3^2, \cdots, 1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1=9^2$，故(4)中各式等价于下面的(5)式。

(5) $121 = 11 \times 11$,

$12321 = 111 \times 111$,

$1234321 = 1111 \times 1111$,