6 欧拉三十六军官问题

从六个部队里面，各选出六个阶层的军官(例如上、中、少校，上、中、少尉)，每阶层一人 ，一共三十六人。排成六行六列，使得每一行每一列有各部队、各阶级的代表，这就是欧拉的三十六军官问题。在这个问题内，六这个数至关重要，因此才使得这个问题成为不可解决。这问题的发生，大概跟普鲁士的斐特烈国王有关，事情缘于阅兵而起，由欧拉去找出解决方案的。

如果不用六这个数而取四的话，则问题就很容易解决了。例如纸牌中有四种不同的花样，即黑桃、红心、红方、黑梅。由这四种里面各取A，K，Q，J一共十六张，排成四行四列。使得每一行每一列，各有一张黑桃、红心、红方、黑梅，而且每一行每一列，各有一张A，K，Q ，J 。这种排法，如同图93所画的，就是一种。为了说明方便起见，我们用数字标识四种不同的花样与四种不同类别

1	2	3	4
黑桃	红心	红方	黑梅
A	K	Q	J

这样，我们可用两个数字去表示一张牌。例如1，2表示黑桃K，2，1表示红心A。

1,1	2,2	3,3	4,4
2,3	1,4	4,1	3,2
3,4	4,3	1,2	2,1
4,2	3,1	2,4	1,3

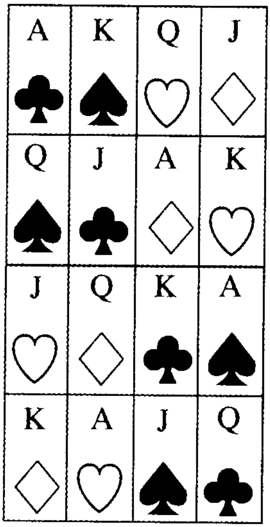

图93

欧拉的问题，一般化以后，就成为下述的问题：n个数字1，2，…，n，两个两个一组(1，1)(1，2)，(2，1)，(2，2)…(n，n)，一共n^2个组，把它们配置在n个行，n个列里去，使得每一行，每一列无论第一数字或第二数字，全无遗漏地含有1，2，…，n。这种行列，不妨称之为n次的欧拉方阵。

前述的四次欧拉方阵内，单把第一数字提出来，成为图94所示的。各行、各列都有1，2，3，4。换言之，即无论哪一行、哪一列中都没有重复的数字。这种行列称为拉丁方阵。拉丁两字的称谓，是由欧拉命名的。他曾把上文的(1，1)(1，2)用(a α) (a β)来标识。第一数字用拉丁字母，第二数字用希腊字母。这样说来，单用第二数字组成的方阵，应称为希腊方阵了。可是这希腊方阵既与拉丁方阵的性质一样，又何必另起名字呢?

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

图94

要作上述的拉丁方阵，先就1234的自然顺序排在第一列。再将1，2交换，3，4交换，排在第二列。为了使这种交换容易区别起见，用(1，2)，(3，4)去标识它。然后将第一列用(1，3)，(2，4)交换后的顺列排在第三列，用(1，4)(2，3)

交换后的顺列排在第四列，这样一来，同行内绝无相同的数字，因此作成一个拉丁方阵。

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

图 95

拉丁方阵既作成了，则列与列之间按任意的顺序交换一下，又成了另一拉丁方阵。例如由上述的拉丁方阵，将第一列不动，原在第三列的移至第二列，原在第四列的移至第三列，这样循环移置就成了图 95 所画的拉丁方阵。这正是图 93 那个表内第二数字所成的排列。

用同样的方法，可以作八次的欧拉方阵，如图 96 所画的。为了更清楚起见，让我们作如下的说明：先把八次方阵分为四个四次方阵。在左上角与右下角所在的两个四次方阵，如图96I所

I	II
II	I

1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8
2,3	1,4	4,1	3,2	6,7	5,8	8,5	7,6
3,5	4,6	1,7	2,8	7,1	8,2	5,3	6,4
4,7	3,8	2,5	1,6	8,3	7,4	6,1	5,2
5,4	6,3	7,2	8,1	1,8	2,7	3,6	4,5
6,2	5,1	8,4	7,3	2,6	1,5	4,8	3,7
7,8	8,7	5,6	6,5	3,4	4,3	1,2	2,1
8,6	7,5	6,8	5,7	4,2	3,1	2,4	1,3

图 96

表示的地方，用图94所画的四次拉丁方阵置放进去。在II所表示的地方，用5，6，7，8代替1，2，3，4所成的同样拉丁方阵放进去。这样一来，八次的拉丁方阵算得出了，这个作为第一数字所成的方阵。然后就此方阵，列与列之间照 1 3 5 7 4 2 8 6 的顺序调换一下，调换后所得到的当做是第二数字所成的拉丁方阵。

奇数次的方阵，可以简单地作出来。例如作一个五次的欧拉方阵吧。第一数字的安排如下：第一列就 1 2 3 4 5 的顺序排出来，第二列是 2 3 4 5 1，第三列是3 4 5 1 2，第四列是4 5 1 2 3，第五列是 5 1 2 3 4。这样子就作成了第一数字组成的拉丁方阵，至于第二数字组成的拉丁方阵，可就刚才组成的拉丁方阵，列与列之间照 1 5 4 3 2 的顺序调换一下而作成。所有的奇数次欧拉方阵，都可以用同样的方法得到。

1,1	2,2	3,3	4,4	5,5
2,5	3,1	4,2	5,3	1,4
3,4	4,5	5,1	1,2	2,3
4,3	5,4	1,5	2,1	3,2
5,2	1,3	2,4	3,5	4,1

图97

其次让我们提一提欧拉方阵的结合法。假定有一个m次及一个n次的欧拉方阵A与B，则照下述的结合方法，可以得到mn次的欧拉方阵，要说明这种结合方法，举一个例就可以了。例如图93的四次方阵与图98的三次方阵B结合起来

aa	*bb*	*cc*	*dd*
bc	*ad*	*da*	*cb*
cd	*dc*	*ab*	*ba*
db	*ca*	*bd*	*ac*

(A)

11	22	33
23	31	12
32	13	21

(B)

图 98

A_{11}	A_{22}	A_{33}
A_{23}	A_{31}	A_{12}
A_{32}	A_{13}	A_{21}

图 99

即可得十二次的欧拉方阵。为了容易了解起见，把四次方阵内的数字1，2，3，4用文字a，b，c，d代替而写出来。如图98(A)。

把十二次的方阵九等分，分为9个四次的方阵，每一个四次方阵全用图98的方阵A代入。但为了分别起见，这9个A全附以脚注。脚注是由两个数字组成的。凡与图98三次方阵B内两数同位置的A，就用该两数作为脚注，如图99所表示的。一般由A_{ij}所代表的四次方阵，是由图98(A)内所写的文字下加i、j两个脚注组成的。因此，将图99的9个A_{ij}，各以这些文字组成的四次方阵代进的话，就成为一个由十二种记号a_1，b_1，c_1，$d_1 \cdots a_3$，b_3，c_3，d_3组成的十二次欧拉方阵。这十二种记号如果用自1起至12止十二个数字代替，或者用$a,b,c,\cdots,k,l$等12个文字代替均可。如果用数字代替的话，则十二次方阵可由图100所示。

1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9	10,10	11,11	12,12
2,3	1,4	4,1	3,2	6,7	5,8	8,5	7,6	10,11	9,12	12,9	11,10
3,4	4,3	1,2	2,1	7,8	8,7	5,6	6,5	11,12	12,11	9,10	10,9
4,2	3,1	2,4	1,3	8,6	7,5	6,8	5,7	12,10	11,9	10,12	9,11
5,9	6,10	7,11	8,12	9,1	10,2	11,3	12,4	1,5	2,6	3,7	4,8
6,11	5,12	8,9	7,10	10,3	9,4	12,1	11,2	2,7	1,8	4,5	3,6
7,12	8,11	5,10	6,9	11,4	12,3	9,2	10,1	3,8	4,7	1,6	2,5
8,10	7,9	6,12	5,11	12,2	11,1	10,4	9,3	4,6	3,5	2,8	1,7
9,5	10,6	11,7	12,8	1,9	2,10	3,11	4,12	5,1	6,2	7,3	8,4
10,7	9,8	12,5	11,6	2,11	1,12	4,9	3,10	6,3	5,4	8,1	7,2
11,8	12,7	9,6	10,5	3,12	4,11	1,10	2,9	7,4	8,3	5,2	6,1
12,6	11,5	10,8	9,7	4,10	3,9	2,12	1,11	8,2	7,1	6,4	5,3
a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

图 100

利用上述的方法，从4次或8次的欧拉方阵，每回用4次的方阵去结合起来，我们可以得到16次，32次，64次等等方阵，换言之，即次数为2的幂的欧拉方阵可以得到。(当然这些次数的欧拉方阵如不用上述的结合法，而用8次方阵采取同样的方法，也可直接得到)。这些方阵如果和奇数次的方阵结合起来，则次数为4的倍数的欧拉方阵可以得到。

剩下还没有提到作法的，是以2，6，10等

所谓半偶数(即2的倍数而非4的倍数)为次数的方阵 。2次欧拉方阵不存在，是非常明显的，因无论把11放在何处，则与它同行的，非22不可，与它同列的，也非22不可。同样的22出现在两处，这是事实上所不允许的。至于6次方阵，即三十六军官问题，经欧拉多年苦心研究后，认为是不可能做到的。可是不可能的证明是出乎意外的难，连大名鼎鼎的欧拉都弄得没办法，想不到以后一个不大出名的人，以通俗的形式，把这问题解决了。下面我将介绍半偶数次欧拉方阵的不可能的证明。

这个证明是根据德国人魏里克的思想(见德国数学协会年报)而成的。他原来的证明很不清楚。而且有些地方还不十分周密。

现在假设n是偶数，而且假想n次的欧拉方阵已经作出来了。方阵内第一格用坐标式表示出来，由(1，1)到(n，n)。每一格配以两数所成的数对，整个方阵由数对(11)…(nn)按照某一定的顺序排列。此时，方阵的形式可以换一种写法，即以格子的坐标(x，y)与所配置的数对(uv)表示出来：具体地说，即以$xyuv$四个文字一排所成的记号，把整个方阵表示出来。这种记号共有n^2

个，可称之为n次欧拉方阵的记录，用S来表示。例如图93四次欧拉方阵的记录，用下面的串列表示。

对于这样的记录，任意取两行来看看。n^2个数对(11)(12)(21)…(nn)中每一对只出现一回，不能少也不能多。这原因也很简单，第一行与第二行组成方阵内格子的坐标，当然符合所述的情形，第三行与第四行是配置的数对，当然也没有问题。至于第一行与第三行，为什么符合所述情形呢?这因为第三行是欧拉方阵内第一数字组成的，其每一列第一数字全含有1，2，…，n。第一行与第四行之所以符合所述情形的原因，是因为第四行是欧拉方阵内第二数字组成的，每一列的第二数字全是由1，2，…，n组成。第二行与第三行，第二行与第四行的关系也可同样地说明。

1	1	1	1
1	2	2	2
1	3	3	3
1	4	4	4
2	1	2	3
2	2	1	4
2	3	4	1
2	4	3	2
3	1	3	4
3	2	4	3
3	3	1	2
3	4	2	1
4	1	4	2
4	2	3	1
4	3	2	4
4	4	1	3

n既然是偶数，因此1 2…n之中，奇数与

偶数各占一半，现在就欧拉方阵的记录S中，凡遇偶数，用0来代替；凡见奇数，用1来代替。代替以后的结果，称之为S_0，也就是说S经过如上的代替化作S_0。例如由四次欧拉方阵所得的S_0，可用右面的串列表示，以下要考察S_0的构造。

1	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

S_0内每一行，0与1之数，各占一半，这是非常明确的。因此根据上述S的性质，知道任取两行，其中所含的00，01，10，11四个数对所成的组合，是同数目地被配置着。为了方便解释，这种性质，亦即任何两行，其中所含的00，01，10，11四个数对是同数目的，称为条件P。这个文字P并无任何神秘的意义，只不过用来代替长长的一句话罢了。

现在按照00，01，10，11的顺序，上下排起来，成为两行。如果右面再加上一行，使得条件P仍能满足，则只有如右中甲、乙的两种情形。这只要略为试试，就可了解的。但如果

在甲组或乙组之右再加一行，使得条件P仍能满足，则永远办不到。为什么呢?假设办得到的话，则成为两次的欧拉方阵的记录。但两次欧拉方阵是不存在的。我们在以前就早已知道了。

$$(甲)\begin{cases}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{cases}$$

$$(乙)\begin{cases}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{cases}$$

再看组成串列S_0的记号，不外乎如右的十六种。我们已经知道S_0满足条件P，因此对于这些记号，取任何三行，则必具有上述的几组甲或乙。因此把这些记号排成八个一组，每一组必定满足条件P。现在我们把包含某一定记号(例如0000)的组合列举出来，则有下述的五种形式。此处我们假定某一定记号为0000，并未失去其一般性。因为只要S_0满足条件P，则任何一行内0与1互相交换，条件P的满足不受影响。

(0)	0	0	0	0
(1)	0	0	0	1
(2)	0	0	1	0
(3)	0	0	1	1
(4)	0	1	0	0
(5)	0	1	0	1
(6)	0	1	1	0
(7)	0	1	1	1
(8)	1	0	0	0
(9)	1	0	0	1
(10)	1	0	1	0
(11)	1	0	1	1
(12)	1	1	0	0
(13)	1	1	0	1
(14)	1	1	1	0
(15)	1	1	1	1

因此假定某一定记号为0000，具有普遍性。

以下将就此五种形式，略加说明：如果0000之外，S_0中再含有0001的话，则头三位含有两回的000，因此甲组应重复两回。末三位，则因000与001同时出现，所以甲、乙两组的记号

(Ⅴ)	(Ⅳ)	(Ⅲ)	(Ⅱ)	(Ⅰ)
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 1 1 1	0 1 1 0	0 1 1 0	0 1 1 1	0 1 1 0
1 0 1 0	1 0 1 0	1 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 0
1 1 0 1	1 1 0 0	1 1 0 1	1 1 0 0	1 1 0 0
0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 0	0 0 0 1
0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 1 1
1 0 0 1	1 0 0 1	1 0 0 0	1 0 0 1	1 0 1 1
1 1 1 0	1 1 1 1	1 1 1 0	1 1 1 0	1 1 0 1

上表内每一组所含的记号如以号码表示的话，则如以下所示：

(Ⅰ)	0,	1,	6,	7,	10,	11,	12,	13
(Ⅱ)	0,	2,	5,	7,	9,	11,	12,	14
(Ⅲ)	0,	3,	5,	6,	8,	11,	13,	14
(Ⅳ)	0,	3,	5,	6,	9,	10,	12,	15
(Ⅴ)	0,	3,	4,	7,	9,	10,	13,	14

以上每组由八种记号组成，余下的另外八种记号仍应满足条件P，分别以(Ⅰ′)(Ⅱ′)(Ⅲ′)(Ⅳ′)(Ⅴ′)表示。

同时具备，这就是上表内(I)所示的形式，很明显这八个记号是满足条件P的。

如果除0000之外，S_0内头三位还含有属于乙组的记号时，则此记号是0010或0011。先假设含有 0010，则头三位与末三位应同时地含有甲组的记号与乙组的记号，这就是表内（II）所揭示的。这八个记号当然也是满足条件P的。再如除0000之外，还含有0011的话，则八个记号所组成的形式如表内的（III），（IV）或（V）所揭示的。

现在由满足条件P的S_0内，只要遇见上述的八个记号所成的形式，就消去它，则S_0内的记号将因此而被完全消除，不再残留任何记号。为什么呢？因为要是还有残余的话，称此残余为 S_0'。则S_0'所成的串列仍旧将满足条件P。此时S_0'的头三位将不同时包含甲组与乙组。否则，这将表示（II）或（V）的形式存在于S_0'内。但此等形式一遇见就已取消了。因此残留在S_0'内的头三位记号将纯粹是由甲组或乙组组成，假使纯粹是由甲组所组成的，并且0000与0001同时并存，则将流入（I）所示的形式，但依照我们前述的手段，已被取去了。所以S_0'

内头三位含有000记号的，只有0000一种。此时，末三位也纯由甲组所组成，故S_0'必由下面的四种记号反复轮流所组成，这样一来，第一行，第二行与第四行，既不包含甲组又不包含乙组，条件P将不会满足。这种情形在S_0'要满足条件P的情形下，绝不会发生的。最后假定残留在S_0'内的头三位记号完全由乙组组成，则只要将行内0与1互相交换后，乙组就变成甲组了。同样的讨论，仍可进行。所以无论怎样，因残余而得到的S_0'将不存在。

0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1

综合上面所论的，S_0内的记号，可以八个一组地分划开来。组成S_0'的记号总数n^2，必须是8的倍数，也就是n必为4的倍数。这是偶数次欧拉方阵的必要条件。半偶数既不是4的倍数，所以半偶数次的欧拉方阵不存在。6这个偶数是半偶数，所以6次的欧拉方阵不存在。因此三十六军官的问题，正如欧拉所预想的一样，是不可能排成的。