9.7 在有理数与无理数之间架起一座“天桥”

平方数有许多奇怪和美妙的性质，在数学的后花园里作了

一番巡礼之后许多人就会欣然同意希腊哲学家普鲁刻勒斯（Proclus）的看法："哪里有数，哪里就有美！"

上一节提到的印度数学家的发现令人们大大地吃了一惊，因为自然数被研究了几千年，居然还有这样的"漏网之鱼"被当代人抓住。此外，使人大惑不解的是：这个发现纯粹是巧合呢，还是在数学理论上有更深刻的缘由？

看来，写这篇原始报道的这位学者尽管是国际上著名的数学史专家，在法国布尔巴基（Bourbaki）学派的几位首脑人物指导下工作过多年，但自己并不具有攻坚能力，连写文章也是相当粗心大意的。譬如说，他竟忽视了一个极为重要的关键之点：变换前后的两种自然数之和等于一个常数，例如

$$956+43=999,\quad 957+42=999$$

$$\cdots\cdots$$

$$967+32=999,\quad 968+31=999$$

另外，他也不敢肯定是否还有别的相同长度的连续自然数组存在，这些都是相当大的缺陷，为人们留下了悬念。

后来，美国俄亥俄州的数学家欧文·托马斯（Owen Thomas）也研究了类似问题，并得到了进一步的结果，扩展到了四位数。

本书作者是从香港的一位业余数学家兼音乐家黄志华先生的一本赠书中知晓这件事的，后来，他对此萌生了极大的兴趣，并且很不服气，不能让印度人和美国人着了我们的先鞭，于是奋起研究，并进而彻底地解决了这个悬而未决的难题。全文已在上海教育出版社的《小学数学教师》2004 年 10 月号上发表，在 9.6 节中也已引用，读者们可以纵横对比，以便"大彻大悟"，曲尽其妙。

犹如行列式可以追溯到一阶行列式那样，本书作者不仅做到了“探底”（具备此类性质的最小自然数仅有一个6，$6^2=36$，$3+6=9$，而$9=3^2$，而且变换前后的两个底数之和等于一个常数，即$6+3=9$），通过电子计算机找到了长达数十位的连续自然数组，而且还揭露了这类数组的“显”规律与“潜”规律。

不过，本书作者所用的办法是高阶等差数列与差分法。而下文介绍的却是“明心见性”，通明透彻的手段。好有一比：前者需要累世修炼，累积善功，而后者却是“放下屠刀，立地成佛”的。所以本书作者决心向马丁·加德纳先生学习，乐于介绍别人的成就。其实，当年李太白的识拔郭子仪，熊庆来的赏识华罗庚，乃至英国哈代的垂青拉马努金，其道理是完全一样的。

发现这个神妙方法的人名叫俞润汝，上海浦东南汇人，生于1934年2月，他是中国医科大学1956年的毕业生，可惜在医学上并未充分发挥他的才具，而且身世比较坎坷，言之令人扼腕。俞先生自称，他的数学程度只有高中一年级，并未学过微积分，但他却具有极厉害的数学攻坚能力，敏锐的观察力与洞察力，完全符合加德纳所认定的高素质数学研究人才的标准。如果他再年轻一些，能够跟从一位像剑桥大学哈代那样的明师，则安知世上不会又出一个拉马努金？

乔德哈里-狄希潘特（以下简称乔狄数组）所发现的奇妙连续自然数的平方，分析时应分成奇、偶数两种情况，而偶数的情况正是其“软肋”，比较容易突破。

二位数的乔狄数组共有5个：86，87，88，89，90，而四位数却一举跃升到42个之多，从9859到9900为止，明眼人不难看出，数组所在的区间，其右端点是很“类似”的，一个是

90，另一个是 9900，其中存在着若明若暗的联系。

这就强烈地向我们暗示，如果把乔狄数组推及 6 位，其右端点很可能便是 999000，这个猜想对不对呢？现在，计算器垂手可得，花十几元钱到小菜场旁边的摊头上买一个来，马上就可算出

$999000^2 = 998001000000$，$998001 + 000000 = 998001$

而 998001 正好就是 999 的平方

变换前后的两个底数之和 = 999999，也正如所料。

右端点的问题容易解决，下面来看左端点，我们手里头拥有的数据不多，利用“外推法”猜出规律实在是很不简单，由于俞润汝先生以前的先行者们都没有这种“悟性”，所以都只能半途而废了。

目光如电、洞察力极度高超的俞润汝先生，“若有神助”似地猜到了左端点外面的一系列常数，其实就是 10^2，10^4，10^6，10^8，10^{10}，…（一般形式为 10^{2n}），而它们与乔狄数组的左端点 86，9859 之差乃是

$$100 - 86 = 14$$

$$10000 - 9859 = 141$$

$$\cdots\cdots$$

这使他马上想起了无理数$\sqrt{2}$的近似值，在康韦先生的书里，这个常用的无理数已被计算到了 200 位小数，现在不需要如此正确的近似值，为了说明问题取前面几位已绝对够用了

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562$$

由此可以猜想，六位数的乔狄数组，极有可能从

$$10^6 - 1414 = 998586$$

开始，而终止于 999000，这个猜想究竟对不对呢？我们自然可

以用笔或计算器来验证一下

$$998586^2 = 997173999396$$

$$997173 + 999396 = 1996569$$

而 $\sqrt{1996569} = 1413$

为了节省篇幅，以后继续推广到更多位数的工作就不必一一细表了。

初战告捷，现在可以乘胜追击，继续研究乔狄数组的奇数情况，受到上文的强烈暗示，已经可以猜想，在左端点外面施加强烈影响的一系列常数，可能是 10^1，10^3，10^5，10^7，10^9 等等，而我们手头现已掌握的乔狄数组则为一位的 6，以及三位的 956 到 968，显然 $10 - 6 = 4$；而

$$1000 - 956 = 44$$

这一来就又牵出来一个无理数 $\sqrt{20}$ 了，请看

$$\sqrt{20} \approx 4.472135955\cdots$$

最后，可以进一步“顺水推舟”地推出躲在幕后的第三个无理数

$$\sqrt{10} \approx 3.162277\cdots$$

从而得以造出一张“一目了然”的乔狄数组“一览表”来（奇数的情况见表 9-5，偶数的情况见表 9-6）。

据笔者所知，俞润汝并不知晓 20 世纪大数学家兼数学教育家波利亚（G. Pólya）的经典著作以及联想类比等方法，而是完全自出心裁地解决这一重大难题的。

此法无异在无理数与有理数之间架起了一座“天桥”，真是

一桥飞架南北，天堑变通途

可谓神矣！

表 9-5

位数	区间外面左方潜在影响数	左端点	差数
1	10	6	4
3	1000	956	44
5	100000	99553	447
7	10000000	9995528	4472
9	1000000000	999955279	44721
	(差数完全反映了$\sqrt{20}$的近似值)		
位数	区间外面右方潜在影响数	右端点	差数
1	9	6	3
3	999	968	31
5	99999	99683	316
7	9999999	9996837	3162
9	999999999	999968377	31622
	(差数完全吻合$\sqrt{10}\approx3.162277\cdots$的情况)		

表 9-6

位数	左潜在影响数	左端点	差数	右端点	
2	100	86	14	90	右潜在
4	10000	9859	141	9900	影响数
6	1000000	998586	1414	999000	无关紧
8	100000000	99985858	14142	99990000	要可以
10	10000000000	9999858579	141421	9999900000	省略
		(差数完全吻合$\sqrt{2}$的近似值)			

在看了这种灵感思维之后，写出代数证法，那不过是例行公事式的事后加工而已。