

8.2 大家都拉平

炽热的太阳，向外不断辐射热量，尽管热核燃料很多，但终究会有用尽的一天。其他恒星，乃至星系也是一样。热力学第二定律告诉人们，宇宙最终将是“热寂”，那时，宇宙空间的温度处处都一样，一切活动也就停止了。

上述学说不断遭到质疑，反驳，乃至“批判”，历时已达数世纪之久，但它始终未被驳倒。大家统统一样，完全拉平，“绝对平均”是否就是宇宙的必然走向与普遍规律呢？这真是一个值得深思的大问题与大难题。下面就请你来做一个模拟

游戏。

任意取四个正整数，把它们写在正方形的四个角上。在正方形的外面画一个外接正方形，并且继续做下去，进行层层嵌套（见下图）。然后把相邻的两个数相减（以大减小），得出四个差数之后，写在外接正方形相应的位置上。

继续画正方形，并继续反复执行减法运算，你将会发现，到某一步必然会得出四个“0”来，于是大家都彼此彼此，拉扯得一样平了。

许多人根本不相信上述说法，怎么办呢？还是让事实来说话，我们不妨存心取四个相差悬殊的数，例如 2005，7，686，1000000，然后按照上面的指示，执行减法运算（图 8-1）。

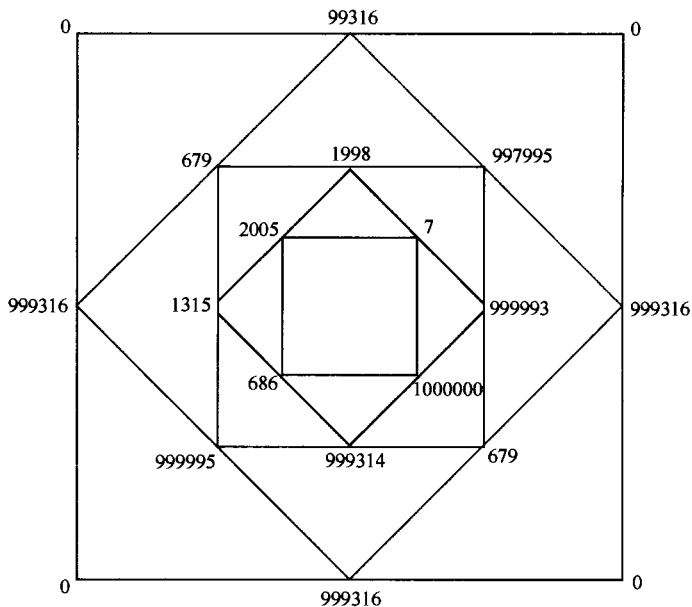


图 8-1

做到第五轮，不可思议的事情终于出现，正方形四只角上的数目都变成了0。

有趣的是，开始时所取的四个数，可以是正整数，也可以是负整数，甚至连分数和小数也行。大家不妨去试一试。

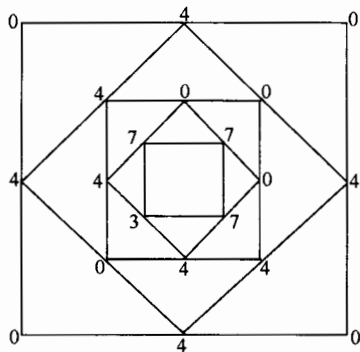


图 8-2

最令人惊讶的是，开始的时候已经有三个数字相同（例如可取 7, 7, 7, 3），照一般人的想法，大概要不了经过五轮，就可以泯除彼此之间的差别，最终归宿为 0 吧。岂知事与愿违，不多不少，仍然需要五轮，才能达到“拉平”地步（图 8-2）。

关于这一点，我们已用代数证明了。设 $a > b > 0$ ，则变换过程如下（我们不想再画图了，改成式子，当然其作用是一样的。要说明的是，在数组 (a, b, c, d) 中，可以视为 a 与 b ， b 与 c ， c 与 d 相邻，而最后的 d 与 a 也是相邻的）

$$(a, a, a, b) \rightarrow (0, 0, a - b, a - b) \rightarrow (0, a - b, 0, a - b) \rightarrow (a - b, a - b, a - b, a - b) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$$

对于有理数的情形，容易证明经过有限步后，最终可得到 4 个 0（提示：不妨设 4 个有理数均为正整数（为什么不妨？），则 4 步以后，最大数必减小）

下面再进一步，把减法改为除法，且在相除时，规定把较大的数作为被除数（或分子），较小数作为除数（分母），这样反复运算的结果，最后会统统拉平，大家都变成 1 吗？

譬如开始时，我们取 $(2, 3, 7, 10)$ 于是经过各轮变换，结果如下

$$(2, 3, 7, 10) \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{10}{7}, 5\right) \rightarrow \left(\frac{14}{9}, \frac{49}{30}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}\right) \rightarrow$$
$$\left(\frac{21}{20}, \frac{15}{7}, \frac{21}{20}, \frac{15}{7}\right) \rightarrow \left(\frac{100}{49}, \frac{100}{49}, \frac{100}{49}, \frac{100}{49}\right) \rightarrow (1, 1, 1, 1)$$

我们知道，按照群论的观点，0 是加法群的幺元（也叫“单位元素”），而 1 是乘法群的幺元。这个游戏虽然简单，寓意却是很深刻哩！