6.16 从斗蟋蟀说开去

我在青少年时代非常爱读清朝蒲松龄的《聊斋志异》，记得其中有一篇名叫“促织”，讲了明朝宣德年间（那个时代铸造的“宣德炉”已成为稀世奇珍，真品时价至少值人民币数十万）的一则故事。明朝宣德皇帝朱瞻基是明太祖朱元璋的曾孙，是位花鸟画家，治国还算有点本事，但有一个不良嗜好，喜欢在宫中斗蟋蟀，而且还要下达“圣旨”，叫民间每年进贡骁勇善斗的蟋蟀，官吏贪虐，弄得老百姓鬻妇卖儿，苦不堪言。

斗蟋蟀的实质其实是一种别具一格的代理人战争，因为名虫各有其主，不像赛马、博彩，基本上是一一对应的。通过蟋蟀的胜负来决定赌博的输赢，这不就是数学上非常有名的“关

系、映射、反演原理”(Principle of Relation，Mapping，Inversion，简称 RMI 原理）在社会人文现象中的一种应用实例吗？可惜芸芸众生大都不明其理也！

中学生在学校里学习对数，用来处理繁琐复杂的大乘大除，乘方开方，其实也是 RMI 原理的一个具体应用。

下面来讲一个别的例子。早在 1990 年，我在发现世上第一个 32 阶三次幻方时*，就发现了 8 个“立方保尾数”，这些数立方以后，最后的三位尾数与原数完全一样。

这 8 个“立方保尾数”是 001，249，251，499，501，749，751，999。

现在让我建立 8 个二进位数（也可视为八进位计数制中的 0、1、2、3、4、5、6、7）与“立方保尾数”之间的一一对应

(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
000	001	010	011	100	101	110	111
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
999	751	749	501	499	251	249	001

下面再来介绍“按位逻辑运算”，必须是末位对末位，中间位对中间位，高位对高位，其运算法则是：

$$\begin{cases}\text{两个 0 相遇，或两个 1 相遇时，结果得 1;}\\ \text{0 与 1 相遇时，结果为 0}\end{cases}$$

按位逻辑运算简记为 $*$，以别于普通的乘法运算记号 $\times$。

由此可知

$$001 * 001 = 111; \quad 111 * 001 = 001$$

---

* 据中国幻方研究会的“主席团成员”之一李抗强先生（湖南岳阳）见告，最近传来一个“特大喜讯”：由中国人发现了 16 阶的三次幻方。

其余可依此类推，不必一一写出来了。

易知按位逻辑运算必然满足交换律，也就是说

$$a * b = b * a$$

有趣的是，这 8 个二进制数也是具有“三次回归”性质的，譬如说

$$011 * 011 * 011 = 011$$

这就隐隐约约，若明若暗地提示我们，8 个二进制数与 8 个立方保尾数之间也许存在着某种“默契”。

下面再来定义“立方保尾数”之间的特殊乘法运算（简称“乘积截尾运算”，记为☆）。这种运算的实际操作步骤是：先执行普通乘法，然后截取乘积的最后三位尾数作为结果，例如

$$501☆751 = 251$$

不难看出，这种特殊乘法满足乘法交换律，即

$$\alpha☆\beta = \beta☆\alpha$$

到此地步，我们的准备工作业已基本完成，下面就可来讲 RMI 原理的实际应用了。

有人不喜欢“按位逻辑运算”，觉得它既生疏，又别扭。那好，我们可以完全不去用它，例如，若要计算

$$101 * 010 = ?$$

先查对应关系的表格，把它们改为

$$251☆749$$

（好像查对数表，把 $a \times b$ 转化为 $\lg a + \lg b$）从乘积截取最后三位尾数之后，得出 999。再从 999，根据一一对应原理进行“反演”（好比查反对数表），就得出 000 了，从而顺顺当当地算出

$$101 * 010 = 000$$

结果当然完全吻合，不可能不对，正确是“天经地义”的，不正确反倒怪了！

反之，如果不喜欢乘积截尾，而是偏爱干净利落的“按位逻辑运算”，那也不妨反其道而行之。

常言道：“萝卜青菜，各有所爱”。有人喜欢山珍，有人偏嗜海鲜，都可以使他们各取所需，各得其所。将来有朝一日，发现了银河系的超级文明外星人，也许他们反而认为，繁琐的大乘大除反而比计算对数更为容易，更为直截了当，不也是很有可能的吗？

说到这里，问题好像已经解决了，但是，“树欲静而风不止”，让我们索性一不做，二不休，再来编制一张“乘积截尾运算”的乘法表（好比普通的乘法九九表）

☆	999	751	749	501	499	251	249	001
999	001	249	251	499	501	749	751	999
751	249	001	499	251	749	501	999	751
749	251	499	001	249	751	999	501	749
501	499	251	249	001	999	751	749	501
499	501	749	751	999	001	249	251	499
251	749	501	999	751	249	001	499	251
249	751	999	501	749	251	499	001	249
001	999	751	749	501	499	251	249	001

在这张表中，001 称为单位元素（简记为 E，即德文 Einheit 的第一字母），它的作用很像是自然数 1，用 1 去乘任何数 N，其乘积就是 N，另外，每一个元素都是其自身的逆元素（在普通有理数域中，7 与 $\frac{1}{7}$ 是互逆的，只有 1 是它自身的逆

元素），譬如说

$$501☆501 = 001$$

$$499☆499 = 001$$

……

这样有趣的代数结构称为“群”（Group），21 岁时就已英年早逝的法国青年数学家伽罗瓦（E.Galois）就是开创群论的第一位功臣，他是因爱情纠葛在决斗中受伤而死去的，至今人们仍在缅怀他的绝世才华与不朽功勋。须知，有句名言说：“群论的天使与拓扑的魔鬼乃是数学的核心”，（拓扑学的狂热研究者往往把这句话说反，把它改为：“拓扑的天使与群论的魔鬼”——作者注）究竟是谁对谁错呢？这句话不由自主地使人想起了凡夫俗子们所梦寐以求的婚恋对象应该具有的素质：**天使容貌与魔鬼身材**。

本文自然还可以继续深入下去，例如讲一讲子群，生成元以及凯莱图等等，但是，作为科普读物的本书不是群论教科书，只能是点到为止，见好便收，否则就是不识好歹，吃力不讨好了。