6.15 小姑娘排队

同约翰·康韦（John H.Conway）先生交往，即使彼此只限于通信，也是人生的至乐。

我是第一个写他传记的，发表在吉林省长春市张玉来先生主编的《科学纵横》杂志上，题目叫做《数学嬉皮士》，可惜这本科普杂志早已停刊多年了。

在剑桥大学的数学系教授休息室，人们经常看到他赤着脚，坐在地上，用纸和笔在算题或做游戏。更难以相信他当时家里竟会买不起电视机。

真的，康韦有着一颗非常可贵的赤子之心。耶稣基督曾经说过，只有天真得像儿童那样的人才能进天国，认识康韦的人十之八九都认为，天国的大门对他是敞开的。

同爱因斯坦一样，康韦特别喜欢儿童，经常和他们一起玩各种游戏。正因为如此，他才能写出一些富有童趣而意味深长的作品来。这是他的特色，其他人是望尘莫及的。另外，从下文也可看到，他的简笔画也独具风味。这里还只是“小试牛刀”，更精彩的可在他同伯莱坎普与盖伊三人合著的皇皇巨著《稳操胜券》中查到。

今有四个孩子排成一行，其中有男有女，也可以全是男孩或全是女孩。为了把问题叙述得更严谨，我们还要规定这些孩

子非男即女，没有中性人（不男不女）或者两性人（又男又女）。

排队时还规定：女孩不能落单，说得更明确一些，那就是：要么没有女孩，如果有女孩的话，那么必须两个女孩并肩排在一起。

为什么必须作这样的规定呢？一切数学模型都是现实社会的影子，也许这种规定是为了防范“色狼”或者“性骚扰”吧。

在有四个孩子的情况，可以有几种排法呢？

采用“穷举法”，康韦告诉我们，共有七种排法，他画了如图 6-4 这样的图。“图”是人类的共同语言，即使你不懂任何外语，一旦厕所门前画了这样的图，肯定你也决不会跑错地方的。

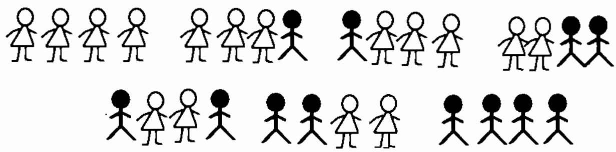

图 6-4

任何文化都有其继承性的一面，决不会是“无源之水，无本之木”。我一看此图，就不禁想起，它一定是从福尔摩斯侦探小说《跳舞小人》学来的，当时在信中戏问康韦，果然如此。康韦是英国人，而福尔摩斯侦探小说是英国亚瑟·柯南道尔爵士的名著。原著我是世袭珍藏的，即使在“大搬家”中也未遗失。

一看上面的图，马上就可以知道，排法共有 7 种。不过，感兴趣的人自然会问，在一般情况下，排法有多少种呢？

在世界名牌出版社斯普林格纽约分社的康韦著作中有一张

表格列出了答案，不过后来我写信告诉康韦，斯普林格的表格印错了几个数据，他欣然同意我的意见，表6-3是一张已经修正的表格（中国有句老话：“尽信书则不如无书”，你说对不对呀）。

表 6-3

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(n)$	1	1	2	4	7	12	21	37	65

n	9	10	11	12	…	…	…
$P(n)$	114	200	351	616	…	…	…

可以看出，随着 n 的增大，可能的排法 $P(n)$ 迅速增大，前面几个数据太小，看不出什么问题。让我们随意选几个来看一看趋势

$$\frac{21}{12} \approx 1.75, \frac{37}{21} \approx 1.7619$$

$$\frac{200}{114} \approx 1.75438, \frac{616}{351} \approx 1.7549$$

可见数列大致是按 1.75 倍的趋势而递增。当然，严格说来，这个递增数列并不是等比数列，1.75 也不是公比。在数列的各项之间，也不存在斐波那契（意大利数学家，1170～1230）或其他已知数列的关系。

其实，1.75 只是一个非常粗糙的近似值，康韦同我已经把它算到 12 位小数（当然仍旧是近似的，不过是精确近似值），把它用希腊字母 τ 来表示，则

$$\tau = 1.754877666247\cdots$$

说破了，τ 是一个无理数，但它不是超越数，而仍是一个代数数（详见下文）。

决定 $P(n)$ 的递推公式为

$$P(n) = 2P(n-1) - P(n-2) + P(n-3)$$

让我们费一些口舌，来解释一下这个关键式子是怎么想出来的。正如数学教育家波利亚（G.Pólya）教授所说的：“只有洞察了解题过程，才能使人真正得益”。这就是“授人以鱼，不如授人以渔”的道理。

为此，我们先用“穷举法”，列出 $P(5)$ 的 12 种排法如下，为了解释方便，也给它们编上了号

(1)	女	女	女	女	女	五个女孩
(2)	女	女	女	女	男	四女一男
(3)	男	女	女	女	女	
(4)	女	女	男	女	女	
(5)	女	女	女	男	男	三女二男
(6)	男	女	女	女	男	
(7)	男	男	女	女	女	
(8)	男	男	男	女	女	二女三男
(9)	男	男	女	女	男	
(10)	男	女	女	男	男	
(11)	女	女	男	男	男	
(12)	男	男	男	男	男	五个男孩

上面已经指出 $P(4)$ 共有 7 种排法。我们现在来着重探讨一下：$P(4)$ 是怎样过渡到 $P(5)$ 的呢？假定四个孩子已经排好了队，现在要加入第五个孩子，显然他只能排在最后。每一种排法的最后或者加入男孩，或者加入女孩，所以一共就有 $7\times 2=14$ 种排法。

在末尾加入男孩的做法自然不成问题，但是加入女孩就可能违反规定“女孩至少两人并排，不能落单”，由此可以看出

在 $P(4)=7$ 的 7 种排法中

(a) 女　女　女　女　　四女无男

(b) 女　女　女　男 } 三女一男
(c) 男　女　女　女 }

(d) 女　女　男　男 }
(e) 男　女　女　男 } 二女二男
(f) 男　男　女　女 }

(g) 男　男　男　男　　四男无女

(b)、(d)、(e) 和 (g) 四种排法的后面是不能添进女孩的，必须从上面的 14 种排法中扣除。

奥妙的是，这四种情况恰恰与 $P(3)=4$ 的四种模式存在着一一对应关系，请看三个孩子排队的模式

(α) 女　女　女

(β) 女　女　男

(γ) 男　女　女

(δ) 男　男　男

在它们的尾巴上都添入男孩后，显然就有

(α)↔(b)　(β)↔(d)　(γ)↔(e)　(δ)↔(g)

这就彰明昭著地说明了必须在 $2P(4)$ 中减 $P(3)$ 的道理。

不过，这样一来，还有漏算的可能性。请注意 (4) 和 (8) 两种情况，它不是由 $P(4)$ 发展成 $P(5)$ 的，因为

(4′) 女　女　男　女

(8′) 男　男　男　女

是违反规定的。我们必须特别注意：(4) 和 (8) 乃是由

(子) 女　女　男

(丑) 男　男　男

直接在右面添加两个女孩而得出的，它跳过了 $P(4)$ 的这一中间阶段。好有一比：一名天才儿童的成长不是由于其父母的教育，而是直接受到了祖父母的影响。我们知道，现实生活中这样的实际例子并不缺少。

最后，我们还要注意到（子）和（丑）两种排法又与（甲）和（乙）两种排法再次存在着一一对应的关系

（甲）女　女

（乙）男　男

（甲）↔（子）　　　　（乙）↔（丑）

这就说明了，最后之所以还要加上 $P(2)$ 的道理。

好了，我在这里总算解释清楚了

$$P(5)=2P(4)-P(3)+P(2)$$

请看，用言语来解释多重递推公式有多困难！

推广到一般情况，自然就有

$$P(n)=2P(n-1)-P(n-2)+P(n-3)$$

最困难的地方已经过去，但是问题还没有彻底解决。我们现在总算得到了特征方程

$$x^3-2x^2+x-1=0$$

但是这个一元三次方程不能在有理数域内分解因子，只好应用卡尔丹氏解法。（其实卡尔丹是剽窃了别人的研究成果，但现在一般还是以他的姓氏来命名解法的，真正的发明者是塔尔塔利亚）。

用 $x=y+\dfrac{2}{3}$，可消去原方程的二次项，使之变成

$$y^3-\frac{1}{3}y-\frac{25}{27}=0$$

此处　　　　$p=-\dfrac{1}{3}$，$q=-\dfrac{25}{27}$

而判别式 $$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{625}{2916}-\frac{1}{729}=\frac{23}{108}>0$$

由于 $\Delta>0$，故可断定这个一元三次方程只有一个实根，应用求根公式可得

$$y=\sqrt[3]{\frac{25}{54}+\sqrt{\frac{23}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{25}{54}-\sqrt{\frac{23}{108}}}$$

最后，变回原来的变量 x，即得

$$x=\sqrt[3]{\frac{25}{54}+\sqrt{\frac{23}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{25}{54}-\sqrt{\frac{23}{108}}}+\frac{2}{3}$$

这就是 x 的正确表达式了，如果求其近似值，即上面所说的 1.754877666247…了。

谁能事先想到：小姑娘排队问题竟能达到如此的深度。但它在康韦先生的全部著作中，只不过是小菜一碟而已！