6.14 连分数

如今的一般大、中学生几乎都不知道连分数为何物，其责任当然不在他们本身。历来的中学数学教学大纲中都未把它订进去。进入大学以后，微积分、线性代数，概率论等后续课程中又不讲它，以致许多人对它一无所知，实在太可惜了。

一般所谓的简单连分数是指形状如下的分式

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$$

，其中 a_1，a_2，a_3，……是正整数。

通常可以把上面的形式书写成较紧缩的形式

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots$$

当 a_1，a_2，a_3，……的个数为有限时，称为有限连分数，否则称为无限连分数。

凡是有限连分数，都可以从最下层起依次化简，将其化为

普通的分数，其方法实际上就是繁分数的化简。

反面的问题是要把已知的普通分数化为连分数，许多人对此束手无策，其实他们不知道，用的办法实际极为简单，只要用欧几里得算法就可以，通俗一点讲，就是辗转相除法。

$\frac{m}{n}=a_1+\frac{p}{n}=a_1+\frac{1}{\frac{n}{p}}$ （a_1 为商数，p 是余数）

若$\frac{n}{p}=a_2+\frac{q}{p}=a_2+\frac{1}{\frac{p}{q}}$ （a_2 为商数，q 是余数）

$\frac{p}{q}=a_3+\frac{r}{q}=a_3+\frac{1}{\frac{q}{r}}$ （a_3 为商数，r 是余数）

……以下可依此类推，于是

$$\frac{m}{n}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots$$

下面让我们用一个具体的数值例子来说明怎样运用辗转相除法把$\frac{251}{802}$化为连分数。运算的草式如下

$q_2=5$	251	802	$3=q_1$
	245	753	
$q_4=6$	6	49	$8=q_3$
	6	48	
		1	

各次所得的商数 q_1，q_2，q_3，q_4 依次为 3，5，8，6

于是$\frac{251}{802}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{6}}}}$或浓缩形式$\frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{8+}\ \frac{1}{6}$

下面来看一看各次近似值之构成规律：

设连分数可表示为 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots\cdots$

则前面三次近似值为

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1a_2+1}{a_2}\text{（此式由 } a_1+\frac{1}{a_2}\text{ 通分变化而得）}$$

$$\frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_3\cdot a_2+1}$$

此式看起来很复杂，很可怕，但其实并不难。只要记住它的构成规律即可记住：以第三次商乘二次近似值之分子，再加上一次近似值之分子，即得到三次近似值之分子；分母的情形也完全类似：以第三次商乘二次近似值之分母，再加上一次近似值之分母，就得到三次近似值之分母。

用数学归纳法可以证明，n 次近似值的构成规律也是如此，即

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$$

$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$$

$\frac{p_1}{q_1}$，$\frac{p_2}{q_2}$，…，$\frac{p_n}{q_n}$ 分别称为一次近似分数，二次近似分数……乃至 n 次近似分数；n 为奇数时，叫做奇次近似分数，n 为偶数时，则叫做偶次近似分数。

每次近似分数都要比在它之前的任何近似分数更逼近连分数的真值。

无限连分数有一个极其重要的性质如下：

奇次近似分数单调增大，但永远小于连分数的真值；

偶次近似分数单调减小，但永远大于连分数的真值。

例 $3.14159=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{25+}\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{4+}\cdots$

其各次近似值为$\frac{3}{1}$，$\frac{22}{7}$，$\frac{333}{106}$，$\frac{355}{113}\cdots$

其中$\frac{22}{7}$就是我国南北朝时期的大数学家祖冲之所算出的“疏率”，$\frac{355}{113}$则是他得出的“密率”。许多中学生以前只是从语文教科书、历史教科书上听到过，一知半解，似懂非懂。现在学了连分数知识，就彻底搞清楚了。

阴历的月大月小，也同连分数有关。我们知道，朔望月有29.5306天，把小数部分化成连分数

$$0.5306=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{33+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$$

它的各次渐近分数是

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{8}{15},\frac{9}{17},\frac{26}{49},\cdots,\frac{867}{1634},\frac{893}{1683}$$

也就是说，在15个月中应当安排8大7小，49个月中应该有26个大月，23个小月，等等。

阴历的置闰办法，一般是“十九年七闰”，即在十九年中，必须安排七个闰年。这同连分数也有密切关系。因为回归年有365.2422日，而朔望月为29.5306日，将假分数$\frac{365.2422}{29.5306}$化为连分数，便得

$$12+\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{16+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{2+}\frac{1}{6+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2}\cdots$$

它的各次渐近分数便是

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{4}{11},\frac{7}{19},\frac{116}{315},\frac{123}{334},\frac{731}{1985}\cdots$$

下面让我们再来介绍一个非常有趣的课题——循环连分数(Recurring Continued Fractions)，它才是连分数的精髓。

一般来说，开平方开不尽的数$\sqrt{N}$是一个无理数，但它必定是一个循环连分数，然而，开立方或开高次方时开不尽的数（$\sqrt[3]{N}$或$\sqrt[n]{a}$…等）就不行了。

将二次不尽根数化为循环连分数是一个迭代过程，要点如下：

（1）求出最大整数，并将其析出。

（2）分子有理化，乘以共轭根式。

（3）将所得结果的分子分母予以颠倒。

例 试将$\sqrt{19}$化为连分数

$$\sqrt{19}=4+(\sqrt{19}-4)=4+\frac{3}{\sqrt{19}+4}$$

在$\frac{\sqrt{19}+4}{3}$中含有最大整数 2，可以把它析出，以后遇到类似场合，将不再一一说明了。故有

$$\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}=2+\frac{5}{\sqrt{19}+2}$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}=1+\frac{2}{\sqrt{19}+3}$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}=3+\frac{5}{\sqrt{19}+3}$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}=1+\frac{3}{\sqrt{19}+2}$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}=2+\frac{1}{\sqrt{19}+4}$$

$$\sqrt{19}+4=8+\ (\sqrt{19}-4)\ =8+\cdots$$

此时我们发现$\sqrt{19}-4$已在前面见过，也就是说，循环出

现了，此后 2，1，3，1，2，8 将会不断重复，于是得出

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{8+}\cdots$$

法国大数学家拉格朗日（Lagrange）求出了以下几个著名的循环连分数

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\cdots$$

众所周知在用小数表示时

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562\cdots$$

$$\sqrt{3} \approx 1.732050807\cdots$$

$$\sqrt{5} \approx 2.236067977\cdots$$

它们是多么丑陋，多么混乱，一旦进了“连分数”这所特殊的“美容院”，就立即化媸为妍，从丑女摇身一变，成为“绝代佳人”了！

尤其令人印象深刻的是“黄金分割数”

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots$$

一旦化成循环连分数之后，竟然得出令人“眼睛一亮”，犹如“休克”的效应

$$1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots$$

在从前全国普及推广优选法时，由于场内听众的数学水平普遍不高，无法提及连分数，更不可能写出如此优美绝伦的表

达式，未免有点太可惜了。欣赏阳春白雪，当然得有相应的水平，否则只好不得已而求其次，改为下里巴人了。记得红学家们曾经说过一句非常粗俗的话：

“贾府里的焦大，是不能欣赏林妹妹的。”