6.13 循环行列式

“循环”，说白了，就是“回到自身”，它如水银泻地，无孔不入，在数学里头到处有它的身影。下面，我们来看循环行列式的一个例子。

为了简单起见，我们以三阶行列式为例，因为它同中小学里的三角、代数都有关联，只要有中学程度的人都能读懂。起步一定要低，“万丈高楼平地起”嘛！

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

叫做循环行列式，它的各行自左至右均由 a_1，a_2，a_3 循环排

列而得，而且主对角线元素全是 a_1。

设 1 的立方根为 ω_1，ω_2，ω_3，即

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\omega_3 = 1$$

当然它们也可记为

$$\omega_1 = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

$$\omega_2 = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ$$

$$\omega_3 = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ$$

这样一来，在形式上就统一了。

在 D 的右侧乘以行列式

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix}$$

从而得到

$$DW = \begin{vmatrix} a_1 + a_2\omega_1 + a_3\omega_1^2 & a_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_2^2 & a_1 + a_2\omega_3 + a_3\omega_3^2 \\ a_3 + a_1\omega_1 + a_2\omega_1^2 & a_3 + a_1\omega_2 + a_2\omega_2^2 & a_3 + a_1\omega_3 + a_2\omega_3^2 \\ a_2 + a_3\omega_1 + a_1\omega_1^2 & a_2 + a_3\omega_2 + a_1\omega_2^2 & a_2 + a_3\omega_3 + a_1\omega_3^2 \end{vmatrix}$$

由于 $\omega_1^3 = 1$，故有

$$a_3 + a_1\omega_1 + a_2\omega_1^2 = \omega_1\ (a_1 + a_2\omega_1 + a_3\omega_1^2)$$

$$a_2 + a_3\omega_1 + a_1\omega_1^2 = \omega_1^2\ (a_1 + a_2\omega_1 + a_3\omega_1^2)$$

所以在行列式乘积 DW 的第一列中可提取公因子 $a_1 + a_2\omega_1 + a_3\omega_1^2$，提取以后该列的元素顺次为 1，$\omega_1$，$\omega_1^2$；完全类似地，

第二列和第三列可以分别提出公因子

$$a_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_2^2 \text{ 与 } a_1 + a_2\omega_3 + a_3\omega_3^2$$

于是

$$DW = (a_1 + a_2\omega_1 + a_3\omega_1^2)(a_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_2^2)$$

$$(a_1 + a_2\omega_3 + a_3\omega_3^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix}$$

由于 $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_1$，所以它们所构成的凡德蒙行列式

$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix}$ 的值不等于 0，可以从上式的左右两边约去，从而得出

$$D = \prod_{k=1}^{3}(a_1 + a_2\omega_k + a_3\omega_k^2)$$

现在可以推广到 n 阶循环行列式了。

设 1 的 n 次方根为

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 1,2,\cdots,n$$

则 n 阶循环行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

的值为

$$D_n = \prod_{k=1}^{n}(a_1 + a_2\omega_k + \cdots + a_n\omega_k^{n-1})$$

例 求四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}。$$

解 因为 1 的四次方根显然为 1，-1，i，$-i$，从而立即可得出行列式的值为

$(1+1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4)(1-1\cdot2+1\cdot3-1\cdot4)(1+i\cdot2-1\cdot3-i\cdot4)(1-i\cdot2-1\cdot3+i\cdot4)=-160$

与其他方法算出的结果完全吻合，但却远为便捷得多了。