6.8 心有灵犀一点通

猜到你心中所想的数，犹如囊中取物，这种游戏当然会打动你。在这出戏中唱主角的是 89，比起人们喜欢的、庸俗的

88（象征“发财”的数，纯属胡说八道，毫无根据）仅仅是大了 1 号，它是一个素数，很不起眼，但却非常神奇。

请你在纸上书写一个多位数，随便几位都行，然后将此数乘上 89，得出乘积之后，把积的末位去掉，在上一位加上被去掉的末位数的 9 倍，反复执行这种运算，直到成为 89 而止。

接着，你要把各次去掉的末位数按照其先、后顺序报告给我，当然必须绝对正确，不得有误，否则戏法就不灵了，那将是你咎由自取，不能怪我。

我在听到你报告给我的数据以后，顷刻之间就能猜到你心中所想的数。不是十拿九稳，而是十拿十稳，你相信不相信。

这席话当然可以使任何人动心，于是就有人挺身而出，他心中想定的数目是 813，用它乘上 89 之后，再列出以下算式，忠实地执行“割末位，加九倍”的运算

$$813 \times 89 = 72357$$

$$\begin{array}{r} 7235\cancel{7} \\ +\quad 63 \\ \hline 729\cancel{8} \\ +\quad 72 \\ \hline 80\cancel{1} \\ +\quad 9 \\ \hline 89 \end{array}$$

于是他向我报告：“照你的嘱咐，我已算过，执行了三步以后，已到达终点 89，割去的末位，依次是 7，8，1。”

岂知他的话刚说完，我就猜中了他心中所想的数 813。他大喜过望，马上跳了起来，大声嚷道：“真神哪！我算是服你了。”

那么，我是怎么猜的呢，把他报告给我的数 7，8，1 颠倒过来，使之成为 187，再用 1000 去减它

$$1000-187=813$$

813 就出来了。如果说白了，813 就是 187 的补数。

现在来说一说猜数的道理。先看第一步，去掉末位 7，加上末位的 9 倍 63，实际上等于是将 72357 加上（$630-7$），而 $630-7=623=7\times89$

按照同样的道理，第二步去掉末位 8，加上 8 的 9 倍 72，实际相当于

$$72980-80+7200=72980+7120=72980+80\times89$$

而第三步则相当于

$$80100-100+9000=80100+8900=80100+100\times89$$

总起来看，最后所得的 89000 与原数的关系应该是

$$89000=89\times1000=89\times\text{原数}+89\times187$$

所以原数当然就是 $1000-187=813$ 了！如果改用别的数目去试，道理还是一样。

照这样看来，猜法实在再简单不过：如果是三位的，颠倒后从 1000 内减去，四位的，颠倒后便从 10000 中减去，依此类推。解释得已经很明白，我们不必再补充别的例子了。

这个有趣的游戏来自许莼舫，而许先生则从陈怀书先生学来。陈先生是中国数学会第一任理事，扬州中学高级教师，当年名声很大，门墙桃李遍及大江南北，后来又转任上海交通大学教师。我在扬州虽有许多亲友，但可惜从未与他见过面。

不过，话得说回来。陈、许两位前辈好像都未对此问题进行过彻底的研究。因此笔者感到骨鲠在喉，不得不吐。

下文将把“割去末位，加上它的九倍”这种运算看成是一种映射（通俗一点讲，说它是函数也无不可），不难看出，89 是这个映射的“不动点”，经过映射之后，它的“像”就是其

自身；同理，0 也是如此，我们可以记为

$$\circlearrowleft_{89} \qquad \circlearrowleft_{0}$$

并用记号 f 表示该映射。

在 89 以下的其他二位数，变化情况又将如何呢：不妨取 37 为初始数，则容易看出

$$f(37) = 66;\ f^2(37) = f(66) = 60$$

另外，让我们用 f^{-1} 表示逆映射，则逆变换的结果是唯一确定的，例如，不难看出

$$f^{-1}(65) = 27 \quad (\text{显然 } 7 \times 9 + 2 = 65)$$

让我们干脆追查到底，搞它一个水落石出，下面便是 37 经过反复映射以后的全部轨线

37→66→60→6→54→41→13→28→74→43→31→12→19→82→26→56→59→86→62→24→38→75→52→23→29→83→35→48→76→61→15→46→58→77→70→7→63→33→30→3→27→65→51→14→37

37 终于重新露面，它像“哈雷彗星”一样，又回来了！

赤裸裸地说，这就叫做“不见棺材不掉眼泪”，在经历了 44 步以后，终于又变回到原来的数 37。

然而，实际上它是一条咬住自己尾巴的长蛇，或者说，一条有着 44 个环节的封闭长链，任何一个环节都可以是它的“头”。实质上是无头、无尾、无始、无终。

还有许多数目漏掉了，让我们任意选一个作为开始数目吧，例如，可选二位数 16：于是我们又可得出另一条轨线

16→55→50→5→45→49→85→53→32→21→11→10→1→9→81→17→64→42→22→20→2→18→73→34→39→84→44→40→4→36→57→68→78→79→88→80→8→72→25→47→67→69→

$87 \to 71 \to 16$

同样是经 44 步而回复原状。在运算过程中，其实我们早已有所预感。

两条轨线与不动点，把 0 至 89 这个范围内的全部自然数都覆盖到了，从而很好地体现了某些数学家经常津津乐道的“各态历经性”。

我们简直可以把上述两条轨线看成是两张“函数表”，来做一个难度要大得多的游戏，譬如说：从某个心中想定的数（一位或二位数）出发，反复执行“割末位，加九倍”的运算，经过 16 步而得了 64，你能猜到原数吗？

当然这样的游戏，较之原来的难度要大得多，简直不可同日而语。但一旦有了函数表，我们只要去查一查“表”，问题即可迎刃而解。

容易看出

$$f(90)=9,\ f(91)=18,\ f(92)=27$$
$$f(93)=36,\ f(94)=45,\ f(94)=54$$
$$f(96)=63,\ f(97)=72,\ f(98)=81$$

如此等等，变换后的像都是以等差数列递增的；

这样一来，我们又看到了映射的周期性，显然

$$f(93)=f(4+89)=f(4)=36$$

请看，这同三角函数的周期性

$$\sin(2k\pi+\phi)=\sin\phi$$

多么相像。

于是，为了讨论逆映射 f^{-1} 的单值性，我们必须规定其主值，而这又使我们不由自主地想到了反三角函数！