6.7 代数胜过补药

空间想像力的不足，是人类在飞跃的科技发展面前暴露出来的一大弱点。说实话，人是一种低维生物。有一个例子很能说明问题，围棋早在上古时代就已发明，其变化之复杂令人叹为观止，但从来没有人想到，要把它推广到三维空间，搞一个

"立体围棋"。

许多药品广告说，吃了他们的"灵丹妙药"，可以大大提高记忆力，心算能力，逻辑思维能力，乃至空间想像力，那当然是"无稽之谈"。

下面两个例子，引自国外的一本应用数学教科书，先讲比萨饼的切割：切一刀得 2 块，切二刀得 4 块，切三刀最多得 7 块，即第三刀必然避开前两刀的交点，切四刀得 11 块，切五刀得 16 块，切六刀得 22 块，……如此。

用 p 表示块数，c 表示切的刀数，则可以列出一张表格（表 6-1）。

表 6-1

c	p	Δp	$\Delta^2 p$
0	1		
		1	
1	2		1
		2	
2	4		1
		3	
3	7		1
		4	
4	11		1
		5	
5	16		1
		6	
6	22		
	……		

从表 6-1 中可以看出，$c \geqslant 3$ 时，p 的各个数据大于 c 的对应数据而小于 c^2 的对应数据。设

$$p = a_1 c^2 + a_2 c + a_3$$

用各个数据代入以决定系数 a_1，a_2，a_3，由简单的代数运算可得出

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = 1$$

于是有 $$p=\frac{1}{2}\left(c^2+c+2\right)$$

此式又常常写成

$$p=1+c+\frac{1}{2}c(c-1)$$

以 p_c 表示切 c 刀最多可得之块数，p_{c+1}表示切（$c+1$）刀最多可得之块数，则可推出

$$p_{c+1}-p_c=c+1$$

或写成以下的递推关系表达式

$$p_{c+1}=p_c+1+c$$

切割西瓜问题与之类似，甚至更难想像。根据前人经验，切一刀可得 2 块，切两刀可得 4 块，切三刀得 8 块；但暗藏着“误区”，十之八九的人以为，切四刀最多可得 16 块；然而，错了。左思右想，即便用尽九牛二虎之力，最多也只能得到 15 块。至于切五刀，那更是只有超乎寻常的空间想像力的“能人”，才能想得出 26 块的正确答案！

让代数来代替空间想像力吧。

同上文一样，在三维空间情况下，我们来制备表格（表 6-2）。

表 6-2

c	p	Δp	$\Delta^2 p$	$\Delta^3 p$
0	1			
		1		
1	2		1	
		2		1
2	4		2	
		4		1
3	8		3	
		7		1
4	15		4	
		11		1
5	26		5	
		16		
6	42			
		……		

今设 $\mathscr{P} = a_1 c^3 + a_2 c^2 + a_3 c + a_4$

将表中的前四个数据代入，再解线性方程组，从而可求出待定系数之值

$$a_1 = \frac{1}{6}, \ a_2 = 0, \ a_3 = \frac{5}{6}, \ a_4 = 1$$

于是得出

$$\mathscr{P} = \frac{1}{6}(c^3 + 5c + 6)$$

此式也可改写为

$$\mathscr{P} = 1 + c + \frac{1}{2}c(c-1) + \frac{1}{6}c(c-1)(c-2)$$

由此推得递推关系式

$$\mathscr{P}_{c+1} = \mathscr{P}_c + 1 + c + \frac{1}{2}c(c-1)$$

进一步推及 n 维空间，得出问题的通解为

$$P = \sum_{j=0}^{n} \binom{c}{j}, \ c \geqslant n$$

此处的 $\binom{c}{j}$ 定义如下

$$\binom{c}{j} = \frac{1}{j!}c(c-1)(c-2)\cdots(c-j+1)$$

其实，它就是通常的组合记号，所以当然有

$$\binom{c}{0} = 1, \ \binom{c}{c} = 1$$