6.2 无限递降法

无限递降法创自法国大数学家费马。费马声称他所发明的这种方法，是他在整个数论领域里所有证明的基础。这个证明办法的重要思路如下：假如已知问题有一个正整数解，并且可以作出一个更小的正整数解，而且新问题的形式“酷似”原来的，宛如原问题的一个“翻版”，再用同样的论证方法，从这个更小的解出发，又可以推到再小一些的解，这个过程可以无限地重复下去，但因为问题的解全都是正整数，于是不可能无限地下推来求越来越小的解，从而可知，这个问题没有解。

显然，无限递降法不同于数学归纳法，也不同于一般常见的归谬证法。它是一种重要的解题思路，研究创造工程，以及进行智力培训的人也是不能不了解的。

让我们通过一个简单例子来说明这种方法。现在的问题是：除了 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 之外，方程

$$x^2+y^2+z^2=2xyz$$

不可能有正整数解。

先讲一个在以下证明中要用到的预备知识，那就是“两个

奇数的平方和，一定不能被 4 整除。”设两个奇数为 $2m+1$，$2n+1$，则其平方和为

$$\begin{aligned}(2m+1)^2+(2n+1)^2 &= 4m^2+4m+1+4n^2+4n+1\\ &= 4(m^2+m+n^2+n)+2\end{aligned}$$

从而可知上述结论正确无误。

由此即可推知，上述方程若有非零正整数解，就绝不可能是 2 个奇数，1 个偶数（这时方程右边能被 4 整除，而左边则不能被 4 整除，得出了矛盾），另外，我们也容易看到，1 个奇数 2 个偶数或 3 个奇数的解将使方程的一边是奇数而另一边是偶数，所以这些情况也不可能是方程的解。从而，只能是 3 个偶数才有可能是方程的解。我们把它们记为 x_1，y_1，z_1，也就是说

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=2x_1y_1z_1$$

现在我们就要迈出重要的一步了。在上述方程中，左、右两边同时用 4 去除，就有

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{2}\right)^2=2\left(\frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{y_1}{2}\right)\left(\frac{z_1}{2}\right)$$

如果我们把$\frac{x_1}{2}$，$\frac{y_1}{2}$，$\frac{z_1}{2}$分别看作 x_2，y_2，z_2，那么上式就是

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=2x_2y_2z_2$$

这时我们注意到，所得到的方程形式完全同原来的一样。重复刚才的证明可知，要使新的方程有正整数解，就必须使 x_2，y_2，z_2 全都是偶数。这样，我们再一次用 4 去除方程的两边，并把$\frac{x_2}{2}$，$\frac{y_2}{2}$，$\frac{z_2}{2}$分别看作 x_3，y_3，z_3，则可进一步得到

$$x_3^3+y_3^3+z_3^3=2x_3y_3z_3$$

到了这个地步，我们可以注意到“它又回来了”这个很不寻常的特性。但是，可别忘了，任何一个正整数都是经不起这种无限制的重复的。譬如说 $2^{10} = 1024$ 可以被 2 整除，仍能得到偶数。但是，经过 10 次以后，它就变成了 1，然而 1 却不是偶数了。由此可知，除了 $x = 0$，$y = 0$，$z = 0$ 之外；该方程根本不可能有正整数解。