6.1 不动点方法

常言道："授人以鱼，不如授人以渔。"应付各式各样的智力竞赛，必须多学几种方法。本文将通过一个简单的例子来介绍不动点方法。

强台风中心附近的风力可达到 12 级以上，简直相当于火车速度的 4～5 倍。然而，在其中心，大约 10 千米直径范围内，由于外围的空气旋转得太厉害，不容易进到里面去，所以里面几乎没有风，这就是所谓的"台风眼"。在那万马奔腾般的怒吼狂风中，居然存在着风的不动点。

数学家花了很多精力研究不动点，因为各式各样的解数学方程问题，归根结底，都可以化成寻找某种"变换"下的不动点问题。

譬如，我们要求 $8x^3+16x-9=0$ 的根，由于它是一个一元三次方程，而作为其一般解法的求根公式要在高等代数里才能引入，当然有点不好对付。

但我们也不至于束手无策，至少有三种办法可用。首先是综合除法，把方程的系数"剥离"出来，从直式算草

$$\frac{1}{2})8+0+16-9$$

$$\begin{array}{r} + \quad\quad 4 + 2 + 9 \\ \hline 8 + 4 + 18 + 0 \end{array}$$

一望而知 $x=\frac{1}{2}$是方程的根，然后再用两次方程求根公式即可把其他两根求出来，它们是$\frac{-1+\sqrt{35}\mathrm{i}}{4}$和$\frac{-1-\sqrt{35}\mathrm{i}}{4}$，在初中阶段，一般只要求把方程的实根求出来就算完事。可是现在有许多初中同学根本没有学过“综合除法”，所以此法虽好，学生们却不会去用。

比较起来，更加切实可行的办法是采用因式分解，通过恒等变换，将原方程的左端变换为

$$2\left(4x^3+8x-\frac{9}{2}\right)$$

$$=2\left(4x^3+2x^2+9x-2x^2-x-\frac{9}{2}\right)$$

$$=2(4x^2+2x+9)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

进而求出 $x=\frac{1}{2}$这个实根，但是这个方法需要高度技巧，要把式子里本来不存在的 x^2 项，硬凑成 $+2x^2-2x^2$，很难构思，极不自然，一般思路不敏捷的同学是想不出来的。

现在让我们来介绍不动点方法，把原方程变换为：$(8x^3+16x-9)+x=x$ 即 $8x^3+17x-9=x$，想出这一步，一点也不难，因为只要在方程两边同时加个 x 就成了。让我们把上式的左端记为 y，即 $y=8x^3+17x-9$，写成函数形式，它反映了一种变换的规律。拿个 x 值来代进去，便能求出一个对应的 y 值，如此等等。

于是不难看出，当 $x=\frac{1}{2}$时，$y=1+8\frac{1}{2}-9=\frac{1}{2}$，可见

$\frac{1}{2}$就是这个变换的不动点，这样一来，不是就把方程的实根求出来了吗？非常明显，这种办法轻而易举，是人人可以学会的好方法。

在数学家眼里，甚至一串无穷个数目，一条曲线，一张曲面……都可以看成一个广义的点。于是，寻求某种未知数字串、未知曲线或者未知曲面，都可以归结为寻找不动点的问题了。