5.9 幻方会阴盛阳衰吗

尽管目前还是“火候”未到，不需要修改“幻方”的定义，但是，“退一步”着想的看法已经一而再、再而三地被提了出来，并逐渐显山露水，从劣势转为优势。

“飞龙在天，利见大人”这是《易经》的一贯看法，中国古代是重视“阳数”而不重视“阴数”的，所以世界上唯一的三阶幻方“洛书”(图 5-26)，收录的数是从 1 到 9，而幻方常数为 15。然而人们发现，把方阵中的每个元素都减去 1，得出的三阶幻方实质不变，仅不过幻方和由 15 变成 12 而已（图 5-27)。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 5-26

3	8	1
2	4	6
7	0	5

图 5-27

就奇数阶幻方而言，改变似乎是微不足道的。但对偶数阶幻方来说，新看法的优点就变得非常突出：变换，同余，迭代，自由度等都自然而然地凸现出来。

下面我们来举一些四阶幻方的浅近例子。这时，将用 0 至

15来取代1至16，而和常数也将从34变为30。现在已可初步看出，30与34虽然均为合数，然而，从各种角度来权衡，30总要比34好得多。

除了中国和印度，法国是世界上研究幻方有很多成就的国家。制作任意阶幻方的三种主要方法：罗伯法、白谦法与哈耶法的发明者全是法国人。法国数学家弗兰尼克·德·贝赛（Franicle de Bessy）造出了所有的四阶幻方，共有880个之多。

当代大数学家之一的康韦先生也是特别喜欢研究幻方的，但他别出心裁，迥然不同于几何方法，而是站在博弈论与数论变换的角度去考虑问题的。可惜在中国，不要说一般人，即使是中国幻方研究会的许多行家里手，对之也比较生疏。这种情况，在不久的将来必定会改观。

在博弈与游戏理论（Game Theory）中起着重要作用的尼姆（Nim）游戏，有个别名叫做中国翻摊游戏，其最特殊的形式为3—5—7游戏，先走是可以赢的，其胜势有以下几种常见形式

$$2+2=0$$

$$3+3=0$$

$$1+2+3=0$$

$$1+4+5=0$$

有趣的是，尼姆等式在移项时是不需要改变符号的，因而有$1+3=2$，$1+4=5$，$1+5=4$等。

如果我们约定，对某个幻方进行数论变换，譬如说，将幻方中的每个元素都加上一个自然数a，则可记为N_a，这里的加法当然是指尼姆加法。

康韦发现，某些四阶幻方在进行变换N_a以后，所得到的仍旧是幻方，例如图5-28～图5-30，等等。

6	10	5	9
13	12	3	2
0	7	8	15
11	1	14	4

$\xleftrightarrow{N_8}$

14	2	13	1
5	4	11	10
8	15	0	7
3	9	6	12

图 5-28

8	7	0	15
3	9	6	12
14	4	11	1
5	10	13	2

$\xleftrightarrow{N_2}$

10	5	2	13
1	11	4	14
12	6	9	3
7	8	15	0

图 5-29

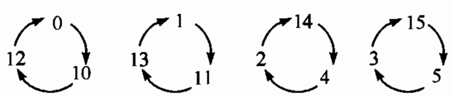
12	3	8	7
1	13	2	14
6	10	5	9
11	4	15	0

$\xleftrightarrow{N_1}$

13	2	9	6
0	12	3	15
7	11	4	8
10	5	14	1

图 5-30

三元轮换一般记为 C（Cycle），其中各数之间的变换如下所示：



6，7，8，9 维持原状不变。

在这种变换作用下幻方可以出现“三人推磨”式的相互转化（图 5-31），这在康韦之前，是从未有人提起过的，它太像三角学中的正弦定理和余弦定理了。

三元轮换中的有关数字，在转译为二进位数后，可以表示为下列四个增广矩阵

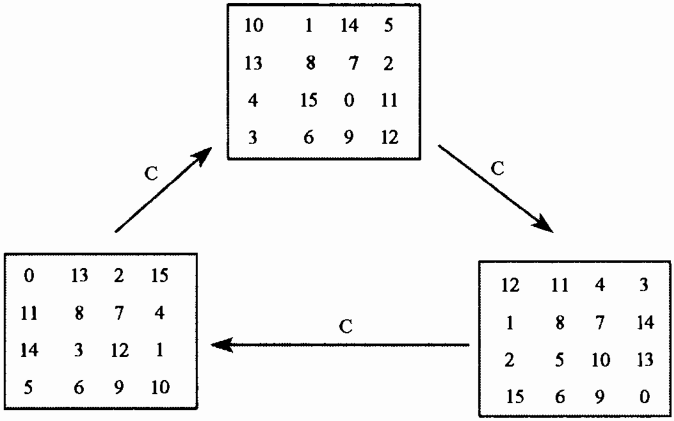


图 5-31

$$A:\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\qquad B:\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$C:\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad D:\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

其中增广矩阵 A，B 的左边为一个三阶方阵，其第一行与主对角线上所有元素都是 0，而其他地方的元素则全是 1，A 的第四列元素全是 0，而 B 的第四列元素则全是 1，另外，矩阵 A，D 互补，B，C 互补，即在矩阵 A 中某行某列是 0 的元，在矩阵 D 中相应的地方必定是 1，反之亦然。

由笔者发现的翻倍同余变换 D.C.(Double Congruent) 在研究完全幻方时发现它们竟然可以形成一条封闭链，其性态犹如虚数单位 $i=\sqrt{-1}$一样，令人拍案叫绝。

今以上海浦东陆家嘴发现的陆深墓中之玉挂幻方为例（图

5-32）（玉挂是古人身上佩带的一种辟邪物，其作用犹如贾宝玉的通灵宝玉，但其所刻的图形是一个幻方）。

7	10	13	0
12	1	6	11
2	15	8	5
9	4	3	14

D.C.

14	5	11	0
9	2	12	7
4	15	1	10
3	8	6	13

D.C.

11	5	14	0
6	8	3	13
1	15	4	10
12	2	9	7

D.C.

13	10	7	0
3	4	9	14
8	15	2	5
6	1	12	11

D.C.

图 5-32

印度古代耆那教徒所创造的四阶完全幻方（图 5-33）也不例外，服服帖帖地受到规律的支配，足见中、印两个文明古国的发现是异曲同工，出自同源。

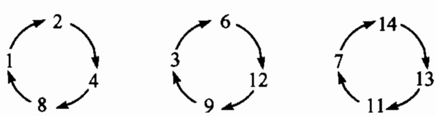
6	11	0	13
1	12	7	10
15	2	9	4
8	5	14	3

图 5-33

至于“翻倍同余”变换各个数字之间的关系，我们可以图解如下：

0，15 不变。

5 变 10，10 变 5，也符合“翻倍同余”的定义，它们是一组对换。



再来稍作解释：7 翻倍后得出 14；14 翻倍后变 28，以模 15 取同余得 13；13 翻倍后得 26，以模 15 取同余得 11；11 翻倍得 22，取同余后得出 7。其余数字的变化也完全类似，请读者自己加以验证。