5.6 六阶幻方之王

要介绍这个幻方领域的稀世奇珍，先来讲个小故事、小插曲。

有一次，普鲁士斐特烈大王决定举行一次盛大的阅兵典礼，打算从六支部队里面，各选出六个不同军衔（例如上校、中校、少校；上尉、中尉、少尉）的军官各一人，合计 36 人，排成一个每边正好有 6 人的方阵，要求每行每列都必须有各个部队和各种军衔的代表，既不准重复，也不能遗漏。这件事情看来很好办，不料命令传达下去之后，却根本无法执行。阅兵司令接二连三地吹哨子，喊口令，排来排去，始终不符合国王的要求，急得像只热锅上的蚂蚁。执事官员和国王的侍从们见事不妙，只好临时找个借口，支吾过去。但这已使得斐特烈大王在众多的外国贵宾面前窘态毕露，出足了洋相。

事后，斐特烈大王对这件事情始终耿耿于怀，认为阅兵司令竟连这点小事也办不好，真是个草包。他就自己动手试试，在纸上编排一下，可是试来试去，竟然也无法成功。于是，他只好去向许多学者讨教，可他们也都束手无策。最后，他不得不去请教当时欧洲第一流的大数学家欧拉，希望能找出一个解决方案来。

那时欧拉已经很老了。在此之前，不知有多少个令人望而生畏的数学难题在他手里迎刃而解。但是这样一个连小孩子也明白其意义，看上去非常简单的“36 军官问题”，竟然也把他难住了。经过长期苦心研究，他终于认为国王的要求是无法满足的，也就是说，那样的六阶方阵是排不出来的。

这类方阵在数学上称为正交拉丁方。目前，它在实验设计（Design of Experiments）中非常活跃，在农业、轻工、生物、食品、医药、家用化妆品等各方面都有很广泛的应用。利用它以后，生产企业就能够以较少的试验次数获得较好的结果，还能节省原料、改进配方，提高效益等等，好处多得说不完。

奇怪的是：三、四、五、七、八、九等各阶正交拉丁方都是作得出来的，偏偏就是六阶的不行。1901 年，法国有一位数学家泰利果真证明了它是不存在的。当年斐特烈大王偏偏碰上了它，真是晦气了。

正是由于六阶正交拉丁方的不存在，所以从 1～36（一般幻方元素都是从 1 到 n^2 的连续自然数）的六阶完全幻方也就始终作不出来，白白浪费与虚掷了中、外各国许多幻方研究家的心血，老是功败垂成，功亏一篑。

许多专家都鸣金收兵、知难而退了。当时只剩下一个倔强

的老人还在坚持，他就是本书作者的老朋友，年登耄耋的南京市邮电局退休职工丁宗智老先生。

丁先生博览群书，尤其对中国传统文化造诣甚深。他认为，在古人的心目中，6一直是个祥瑞之数。含有6的成语不计其数，例如“雪飞六出”，“六丁六甲”，“六畜兴旺”（马、牛、羊、鸡、犬、猪称为“六畜”），“精通六艺”，“横扫六合”，乃至于连市井小民都极口称赞的“六六大顺”。然而六阶完美幻方不存在，这不是明显的矛盾与抵触吗？

丁先生果断地认为，一定存在着解决之道，但必须另辟蹊径。经过无数个不眠之夜，他终于干净、利落、出色地解决了这个大难题。原来竟是“踏破铁鞋无觅处，得来全不费功夫”，山重水复疑无路，柳暗花明又一村啊。

如果用1到36去做素材，营造完美幻方，那是“此路不通”的。但是，人们如果打破思维方式的束缚和禁制，来一个“风物长须放眼量”，先扩大到1到49，排成如图5-11的七阶方阵，然后再去掉中间一行和中间一列上的，剩下来的数，不多不少，恰恰是36个。说也奇怪，经过这样一种“开刀”手术之后，“癌”细胞就被彻底割除，起死回生，不但完美幻方可以创造出来，而且它后来居上，甚至比先出世的其他各阶完美幻方，更加神奇，更加奥妙得多，从而赢得了“六阶幻方之王”的美名。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

图5-11

不可思议的是，其他西方杰出研究家所造出的六阶完全幻方，用的“建筑材料”竟然与丁宗智先生完全雷同，全部吻合，

不存在一星半点的差异。从而使人更加相信，牛顿与莱布尼茨不谋而合地各自独立发现微积分，确实是千真万确的事实了。

上面的这段话可能稍微有点长，但这是必要的铺垫，不得不说。读者们在看到图 5-12 中的这个“六阶幻方之王”以后肯定会大喜过望，从而把厌烦情绪一扫而空，因为它确实太神奇了。

1	42	29	7	36	35
48	9	20	44	13	16
5	38	33	3	40	31
43	14	15	49	8	21
6	37	34	2	41	30
47	10	19	45	12	17

图 5-12

除了每行、每列、每条对角线（包括主对角线、副对角线，以及“折断”了的对角线）上的六个数字之和都等于幻方常数 150 之外，还有八条重要性质，下面让我结合图形（图 5-13 ~ 图 5-20）进行简要解释，以供读者欣赏。所有八个图都有着一个共性，即图中有☆号的这些数目之和等于

25 ×（☆的个数）

☆	☆	☆
☆	☆	☆
☆	☆	☆

图 5-13

☆	☆	☆	☆
☆	☆	☆	☆
☆	☆	☆	☆
☆	☆	☆	☆

图 5-14

	☆	☆	
☆			☆
☆			☆
	☆	☆	

图 5-15

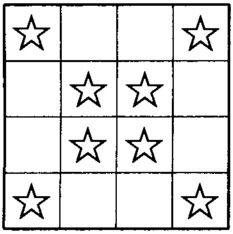

图 5-16

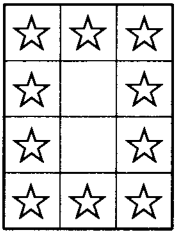

图 5-17

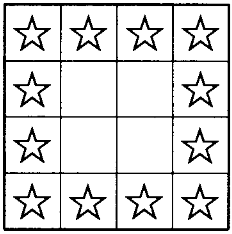

图 5-18

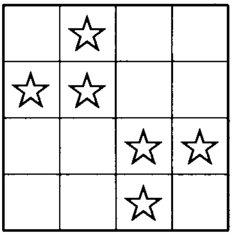

图 5-19

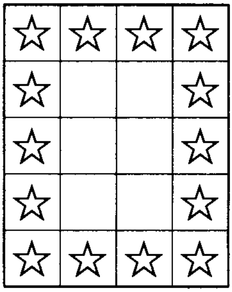

图 5-20

图 5-12 这个六阶幻方中，任何一个三阶方阵中的九数之和等于 25×9，即 225，例如

$$38+33+3+14+15+49+39+34+2=225$$

还应注意的是，第一列与第六列是“相邻”的，第一行与第六行也是如此，所以，还有以下的等式成立，例如

$$1+48+5+36+13+40+35+16+31=225$$

其他类似情况请读者们自行一一验证去吧。

如图 5-14，任何一个四阶方阵中，16 个数目之和等于 $25\times 16=400$，例如

$$9+20+44+13+38+33+3+40+14+15+49+8+37+34+2+41=400$$

需要注意的还是左右、上下边缘相邻的情况。现在，生物学中“克隆”技术吃香得很，我们不妨以原来的六阶幻方之杰出“蓝本”，也来“克隆”一番。

显然，幻方的推广，是可以扩及到全平面的，我们只要“拷贝”一部分，就足以说明问题。在图 5-21 中，请大家要特别注意，在右下角方框里界定的十六个数目，其和数全是等于 $25\times16=400$ 的。而在原先的图形中，这些数目相距甚远，如果没有“火眼金睛”，恐怕是很难看清它们之间的紧密联系的。

1	42	29	7	36	35	1	42
48	9	20	44	13	16	48	9
5	38	33	3	40	31	5	38
43	14	15	49	8	21	43	14
6	37	34	2	41	30	6	37
47	10	19	45	12	17	47	10
1	42	29	7	36	35	1	42
48	9	20	44	13	16	48	9
5	38	33	3	40	31	5	38

图 5-21

$2+41+30+6+45+12+17+47+7+36+35+1+44+13+16+48=400$

$12+17+47+10+36+35+1+42+13+16+48+9+40+31+5+38=400$

在作了以上详细解释之后，想必读者已经心领神会，所以对于其他几个图，就不需要再来逐一讲解了。

只是对于图 5-20，要稍为多说几句。其实这个图，无论是直摆还是横放，性质都能成立，譬如说

直摆的情况（5×4 矩阵）

$$9 + 20 + 44 + 13 + 40 + 8 + 41 + 12 + 45 + 19 + 10 + 37 + 14 + 38 = 350 = 25 \times 14$$

横放的情况（4×5 矩阵）

$$1 + 48 + 5 + 43 + 14 + 15 + 49 + 8 + 40 + 13 + 36 + 7 + 29 + 42 = 350 = 25 \times 14$$

举一反三，触类旁通，相信读者们自然有此能力，我就不必再哓舌矣。