图 5-8

## 5.5 素数幻方

图 5-9 的幻方，其中的九个数字都是素数。素数也叫质数，

是数学里头的热门课题。在这些数目中，最小的是 59，最大的是 659，结尾数字全是 9，无一例外。这些数目，不能被 2，3，5，7 等除尽，当然我们并不需要一个一个地去试除。拿 659 来说，它的平方根比 25 大一些，不到 26，我们只要用 25 以下的素数 2，3，5，7，11，13，17，19，23 去试除，如果都不能整除，那就可以断定它必是一个素数，至于三阶方阵中的其他数，当然也可同样处理。除了以上办法之外，我们当然也可以去查现成的素数表。

| | | |
|---|---|---|
| 569 | 59 | 449 |
| 239 | 359 | 479 |
| 269 | 659 | 149 |

**图 5-9**

外国有位集邮家，他同时又是一位业余数学爱好者，废寝忘食地收集了好多图案精美、价值昂贵的邮票，用它们来制作“素数幻方”。当然，邮票市场上的价格日新月异，一涨再涨，不能以市场价格来计算，因而必须要求邮票的面值是一个素数。在欧美和日本，这样的收藏家为数不少，甚至在专业的数学杂志上为他们出了专刊和特集。

按照一般看法，1 不算素数，整个素数序列从 2 开始：2，3，5，7，11，13，17，19，…，一直延伸到无穷。其中 2 是唯一的偶素数。

很明显，在制造素数幻方时，2 是必须排除在外的，这是因为

$$奇数 + 奇数 = 偶数$$
$$偶数 + 奇数 = 奇数$$
$$偶数 + 偶数 = 偶数$$

拿三阶幻方来说，如果把 2 放入某一格中，那么，含有这一格的行、列或对角线，其和必为偶数，然而不含 2 的行、列

或对角线，其和则必为奇数，于是就产生了矛盾。所以素数 2 是一个不合群的古怪家伙，在制造素数幻方时必须无情地把它“开除”出去！

制造素数幻方，一般地说来，难度不小。当幻方的阶数增高时，情况尤其复杂。用素数序列中的连续素数（不能“跳越”）能否制造出幻方，这是一个很有趣的问题。

日本著名幻方研究家寺村周太郎先生经过长期探索，终于在 1979 年 11 月 7 日造出了一个高达 10 阶的素数幻方（图 5-10）*，其中的“元素”全部是连续素数，完全覆盖，一无遗漏，更无逾越。这个重大发现，使整个组合数学界大大地吃了一惊，因而被学术界认为是幻方研究中的一块“里程碑”，至今这个纪录仍由他保持着，无人能够打破。

收入这个 10 阶素数幻方的最小素数为 23，即整个素数序列中的第 9 号，最大素数为 593，即序列中的第 108 号。10 阶幻方常数为 $S=2862$。

尤其令人啧啧称奇的是：10 阶幻方的“肚子”里竟然还有一个 4 阶素数幻方，从 37 到 103（素数序列的第 12 号到第 27 号），也是连续素数，而这个 4 阶连续素数子幻方的和常数 $S'=276$。

总部设在陕西省延安市、由我国业余数学爱好者自发组织起来的中国幻方研究会自成立以来已取得不少研究成果，他们一直要求本文作者提供资料以供学习、借鉴和赶超，我当然是欣然从命，乐观其成的。

* 译者注：详见日文パズル懇談会ニュース 1979 年第 8 期。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 169 | 23 | 137 | 431 | 373 | 379 | 521 | 179 | 401 | 251 |
| 443 | 227 | 173 | 419 | 491 | 263 | 523 | 113 | 181 | 29 |
| 277 | 31 | 191 | 409 | 349 | 571 | 499 | 109 | 157 | 269 |
| 281 | 241 | 211 | 367 | 509 | 433 | 383 | 199 | 131 | 107 |
| 127 | 163 | 257 | 457 | 397 | 461 | 389 | 239 | 223 | 149 |
| 151 | 193 | 233 | 503 | 467 | 479 | 271 | 229 | 139 | 197 |
| 283 | 563 | 347 | 47 | 67 | 83 | 79 | 337 | 463 | 593 |
| 421 | 541 | 317 | 103 | 71 | 43 | 59 | 311 | 547 | 449 |
| 359 | 293 | 557 | 73 | 101 | 61 | 41 | 577 | 313 | 487 |
| 353 | 587 | 439 | 53 | 37 | 89 | 97 | 569 | 307 | 331 |

图 5-10