5.1 反幻方

最简单的反幻方是三阶的。二阶反幻方是根本不存在的，因为 $1+4=2+3$，无论怎样排列，怎样颠来倒去，总是会不期而遇地撞车。正应了老乡们的一句口头禅：“躲得过初一，可是躲不过月半。”所以二阶反幻方是造不出的。

至于有九个空格的三阶幻方，要把1，2，3，4，5，6，7，8，9九个数字任意填进去，共有 $9!=362880$ 种填法，但由于旋转和反射都不过是“换汤不换药”，每8种排列实质上只好算1种，所以上面的数字要大大打一个折扣，只能有 $362880\times\frac{1}{8}=45360$ 种。

这个数字还是很大，我们不妨随便写出一个来看看（图5-1）。由于它是任意书写的，当然不具备幻方的性质。但是，读者们或许会发觉，在此图中，$7+1+8=3+5+8=16$，也就是说，在这个随便填写的 3×3 正方形阵列中，某一行与某一列上的三个数字之和正好碰巧相等了。

在普通幻方中，和相等是追求的目标，但在反幻方中，却是力图避开。所谓三阶反幻方，就是要用1到9九个自然数填进 3×3 的正方形阵列中，必须使其中任意一行，任意一列，乃至任意一条对角线上的三个数字之和统统不相等。

6	2	7
9	4	1
3	5	8

图 5-1

能满足上述条件的反幻方为数不少，于是人们又给它添上各种附加条件。其中较为引人入胜的附加条件是：凡是填到 3×3 正方形阵列中的自然数必须按顺序邻接成为螺旋形状。

有人已经找到了这样的“螺旋反幻方”，它们倒是“物以稀为贵”，只有两个，见图 5-2 和图 5-3。它们是一个转进去的螺旋与一个转出来的螺旋。从代数的观点来看，反幻方中对应的数字是互补的关系，例如 $1+9=8+2=7+3=\cdots=10$，只要算出了一个，那么另一个也就冒出水面，真是易如反掌。

1	2	3
8	9	4
7	6	5

图 5-2

9	8	7
2	1	6
3	4	5

图 5-3

不妨做一下验算，在上面这两个反幻方中，八个和数分别是

6，12，15，16，17，18，19，21（其中没有一个相同）与

9，11，12，13，14，15，18，24（也没有一个相同）

所以它们的确是地道的“反幻方”。

迄今为止，在反幻方的制作中，还没有什么简单的系统方法。有位美国著名科普兼科幻作家写道：“这些外星人正在做另外一道数学题。假使你在它们之前先做出来了，你就可以获得一百万美元的奖励。题目是：在 4×4 的正方形里填上 1～16 个自然数，不准重复，也不准雷同或遗漏。要求每行，每列，每条对角线上的四个数字之和都不相等，然而这些和必须是连

续的自然数。”

当然这位美国作家的话很有点哗众取宠的味道，我们不能信以为真，可是题目的确有点难度，值得一试。

答案如图 5-4。

6	8	9	7
3	12	5	11
10	1	14	13
16	15	4	2

图 5-4

不难发现，各行、各列以及对角线上的和数为

30，31，38，37，35，36，32，33，34，29

刚好是从 29 到 38，不多不少，十个连续自然数。

也请读者们想一想，仿照三阶反幻方的“螺旋”办法能不能造出四阶反幻方？