

## 4.6 物以稀为贵

在已经过去的 20 世纪，有一批德、识、才、学十分优异的华裔学者出于各种原因长期居留美国，教书育人，在科、教、文、卫等领域作出了杰出贡献。这些知名人士中有语言学家赵元任、数学家陈省身，原籍江苏无锡的胡家三兄弟：胡敦复、胡明复、胡刚复，曾任北大校长的胡适，建筑学家贝聿铭，在上海交通大学当过江泽民的老师的顾毓琇，以及美国哈佛、耶鲁、麻省理工学院等一流名牌大学的名教授王浩、项武义、钟开莱等各位先生。

美国斯坦福大学教授、概率论专家钟开莱先生就是一位教学艺术达到炉火纯青境界而又极富幽默感的名流学者。

在刚刚过去的一个世纪中，概率论已从一个较小的、孤立的课题发展成为一个内容宽广而深入的庞大学科，它对各种应用科学，诸如军事、运筹、生物、医学、经济、统计、心理、体育运动的数学化起着重要作用。随着时间的推移，概率论已在大学课程中安营扎寨，牢不可破地占了一席之地，但是它并不容易学习，优秀渊博、趣味横溢的教科书尤其少见。

世界闻名的斯普林格出版社（Springer-Verlag）看中了钟开

莱先生在斯坦福大学的讲课笔记，把它扩充成为一部名著，其中收入了一些哲学的、历史的以及生活中的丰富实例，以及某些挑战性的课题，如坛子模型、统计物理、遗传模式以及流浪者的随机游动等。读了它之后，可以触发灵感，跃跃欲试，从而结出许多前人从未梦想过的创造成果，例如，一位宁波籍的青年学者研究出的领带打法与随机游动的联系，诸如此类，令许多人刮目相看，击节叹赏。

扑克牌传入中国以来，受到城乡人民的普遍欢迎，而与象棋、围棋等传统游艺融为一体。但一般人对其胜负所依据的概率原理很不了解，只知道机械执行。而在现阶段高中或中专、技校的代数与排列组合章节中也很少触及，或者语焉不详。

众所周知，把 52 张牌彻底洗过，从中抽取 5 张牌，则决定胜负的游戏规则为

同花顺子<sup>胜</sup>→四条<sup>胜</sup>→富而好施<sup>胜</sup>→同花<sup>胜</sup>→顺子

这是大家所公认的，人人信守不渝，百分之百地照办，从来无人提出质疑。然而何以要如此规定，则是不知其所以然。

这五手牌都是难得一见的“紧缺货”，然而其出现概率则大有不同。按照钟开莱先生的计算，这些概率全都可以用一个分数来表示，公共的分母为组合数

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 2598960$$

这个数字不算很大，仅为上海人口数的六分之一，我们知道，美国彩票的出售总额动辄超过一亿五千万张，与之相比，简直是小巫见大巫了。所以，这五种大牌在扑克牌的实战史中，都曾经不止一次地出现过。

按照计算的难易程度，让我们依次来分析。

(1) 四条：

显然，这个概率的分子理应是  $13 \times 48 = 624$ 。何以见得，由于四张牌的点数必须相同，所以它们必然是 AAAA，2222，……直到 KKKK，共有 13 种，而剩下的一张牌则是  $(52 - 4)$  张牌中的任一张都可以，所以根据排列组合中的“乘法原理”，分子应为  $13 \times 48 = 624$ ，从而出现四条的概率是

$$\frac{624}{2598960} \approx 0.0002401$$

(2) 同花：

$$\text{分子上的数应为 } 4 \times \binom{13}{5} = 4 \times \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 5148$$

扑克牌有黑桃、红心、方块、梅花（也有叫“草头”的）等四种花色，每种花色有 13 张牌，这个道理略为一想就明白了，由此可以算得，出现同花的概率是

$$\frac{5148}{2598960} \approx 0.001981$$

(3) 顺子：

分子应为  $10 \times 4^5 = 10 \times 1024 = 10240$ 。这是什么道理呢？原来，顺子的五张牌，其点数必须成为等差数列，就点数最小的一张牌而言，可以是一点（即爱司，Ace）到十点，共有 10 种情况，所谓“顺子”，主要着眼于牌的点数，至于牌的花色，那是不闻不问的。所以第一张牌可取四种花色之一，而第二、三、四、五张牌仍然如此，故应为

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$$

从而可以算出相应的概率为

$$\frac{10240}{2598960} \approx 0.00394$$

这个概率接近于千分之四，不算太小。

(4) 同花顺子：

分子应为  $10 \times 4 = 40$ ，道理已在上一段讲过，不必再赘述了，与其相应的概率为

$$\frac{40}{2598960} \approx 0.00001539$$

出现同花顺子的机会微乎其微，真是“凤毛麟角”，难怪它在大牌中居于翘楚的地位矣。

(5) 富而好施（原文为 Full House，又可译为“满仓”或“满贯”，至今没有统一），那是五张牌中有三张同点与两张同点的一组牌。在这种情况下，分子上的数应为

$$(13^2 - 13) \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = (169 - 13) \times 4 \times 6 = 156 \times 24 = 3744$$

这种情况分析起来最麻烦一些，但也因此而更有趣味，我们从表 4-2 中可以看出，主对角线上的情况不可能出现，应当排除，其他则均属可行，这就一举得出  $13^2 - 13 = 169 - 13 = 156$  了；当然还可能有其他解法来导致同样结果，但毫无疑问这是“清澈见底”，最能表现“洞察力”的解法。至于  $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$ ，当然是就牌的花色而言，我们已在前面说明过了。

表 4-2

	AA	22	33	44	...	QQ	KK
AAA	—	✓	✓	✓	...	✓	✓
222	✓	—					
333	✓		—				
444	✓			—			
⋮	⋮						
QQQ	✓					—	
KKK	✓						—

这种牌的概率是

$$\frac{3744}{2598960} \approx 0.0014406$$

到此地步，事情已经一清二楚。原来，胜负的规定是完全依照概率的大小来决定的，严格遵守了“物以稀为贵”的原则。

最后应该说明的是 Ace（爱司）这张牌的歧义。根据英汉大辞典的标准释义，它即是 1 点，又算王牌，比老 K 更大，所以实际上可算是 14 点，但这两种身份不能同时具有；所以 A2345 与 AKQJ10 都可看作“顺子”，然而 JQKA2 却是“非法”的组合，不能视为“顺子”。

钟开莱先生原来书中所计算出来的数据，同世界赌城拉斯维加斯（Las Vegas）的一位赌博专家的结果有差异，后来钟先生承认自己的推算有误，原因就在忽略了“爱司”Ace 的歧义。

从善如流，知错必改，名家风度，毕竟不凡也。