

3.6 灵机一动

现在大家都在痛批“题海战术”，但是常言道：“拳不离手，曲不离口”，哪有不做题目而能成为数学家的？

什么样的题目才算好题？见仁见智，大家的看法也各不相同。其实，20世纪的数学教育大师波利亚早就有他的一套成熟看法。他的传世名著《怎样解题》也已成为千锤百炼，颠扑不破的经典名著了。

好的题目应该具有召唤灵感的作用，如果受到这类题目的熏陶，那么久而久之，就必然潜移默化，人也变得越来越聪明，即使不成为名家，也必然是特级教师或解题能手了，这就

是所谓“强将手下无弱兵”的道理。

好题目不可多得，贵在重视积累。现在从外文书上引来一题，为了节省篇幅，原文我就从略了。

设 x, y, z 都是非零正整数（“非零”两字在这里可以删去，写在这里，无非是强调；说得更清楚一些而已），试问：不定方程 $x + y + z = 20$ 共有多少组解？

这题当然不难，人人得而解之。有一种直截了当的想法是：

若 $x = 1$ ，则 $y + z = 19$ ，于是 y 有 18 个数可以选取；由于 x, y 都已确定，从而 z 也就随之而定，再无自由变动之余地了。

若 $x = 2$ ，则 $y + z = 18$ ，于是 y 有 17 个数可以挑选，同理， z 也随之而定。

与上面的想法一样，亦步亦趋。最后，若 $x = 18$ ，则 $y + z = 2$ ，于是只能有 $y = 1, z = 1$ 一组答案了。

因此，总的挑选法共有 $18 + 17 + 16 + \cdots + 1 = \frac{1}{2}(1 + 18) \times 18 = 171$ 种。

这种解法平铺直叙，不妨名之为“自由度”法。

第二种解法则异军突起，恍如飞来峰从天外飞来。

请注意： $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 20$ ，式子中间一共含有 19 个“+”号，如果从中任意选择两个“+”号作为“分水岭”，则等式的左边就被区分为三段，前段作为 x ，中段作为 y ，后段作为 z ，解法不是得出来了吗？于是我们猛然省悟，所提问题的解法实际就等价于从 19 个“+”号选取 2 个的组合数，于是马上得出 $\binom{19}{2} = 171$ 种，解法自动浮出水面来了，简直是

“大彻大悟”呀！

自古以来，东方哲学家们（尤其是印度与中国的古圣先贤们）对瞬间的灵感体会极深，称之为“顿悟”，现在存世的大量禅宗语录，可为明证。可惜它们大都用之于宗教或文学艺术方面，例如六祖慧能大师或者唐代大诗人李商隐的“心有灵犀一点通”，科学上的事例非常稀少。爱尔兰大数学家哈密顿（Hamilton, 1805 ~ 1865）走在桥上时突然触动灵机发现了“四元数”，化学家凯库勒梦见一条蛇咬住自己的尾巴而发现了苯的结构式，这类科学史上的佳话也是凤毛麟角，不可多得。

脑中突然闪耀的电火花，也就是压死骆驼的最后一根干草，说到底，其实就是科学发现与技术创新的第一推动力，也就是马丁·加德纳先生（1914 ~ ）所说的洞察力（Clairvoyance）。他的杰作《啊哈！灵机一动》以几十种文字问世，至今风行不衰，成为数学科普书中的头号畅销书，一代又一代的人，都要去认真拜读啊。

但愿我国的出版界早下决心，把先生的全部著作译成中文。