3.4 亲如一家

将代数与三角分为两门课程，不过是人为的分割，实际上两者之间并没有明确界限，经常不分彼此，而且可以互通有无，相互支援。

下面我们不妨通过一道趣题来阐明这种观点。

已知　$x+y+z=xyz$，求证

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

先说一说直接的代数解法。

通分以后，分母就已经是 $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$ 了，因此，为了节省书写空间，下文只看分子就行。

$$\begin{aligned}\text{左式的分子}&=2x(1-y^2)(1-z^2)+2y(1-x^2)(1-z^2)\\&\quad+2z(1-x^2)(1-y^2)\\&=2x(1-y^2-z^2+y^2z^2)+2y(1-x^2-z^2\end{aligned}$$

$$+x^2z^2)+2z(1-x^2-y^2+x^2y^2)$$
$$=2(x+y+z)-2x^2y-2xy^2-2yz^2-2y^2z$$
$$-2z^2x-2x^2z+2xyz(yz+zx+xy)$$

整理到此地步，令人目眩神摇，眼花缭乱，怎样才能拨开迷雾见青天，解开这团乱麻？

解决的途径，说破了却是非常有趣。原来，我们需要来上一个“双向替换法”：看到 $x+y+z$，要用 xyz 去代替；反之，看到 xyz，则用 $x+y+z$ 去代替，这岂不是公平交易，老少无欺？

按照这种主导思想，让我们继续往下进行，便有

$$2xyz-2x^2y-2xy^2-2y^2z-2yz^2-2z^2x-2x^2z$$
$$+2(x+y+z)(yz+zx+xy)$$
$$=2xyz-2x^2y-2xy^2-2y^2z-2yz^2-2x^2z-2z^2x$$
$$+2xyz+2x^2z+2x^2y+2y^2z+2xyz+2xy^2+2yz^2$$
$$+2z^2x+2xyz=8xyz=\text{右式的分子}$$

那些讨厌的东西，正好全部抵消了，岂不快哉！

再来看三角证法。

令 $x=\tan A$，$y=\tan B$，$z=\tan C$

由 $x+y+z=xyz$，即

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

根据三角知识，我们即可断定

$$A+B+C=k\pi\ (k\text{ 为整数})$$

从而 $2A+2B+2C=2k\pi$

$$\therefore\quad \frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}$$
$$=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}+\frac{2\tan B}{1-\tan^2B}+\frac{2\tan C}{1-\tan^2C}$$

$$= \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C$$

$$= \tan 2A \cdot \tan 2B \cdot \tan 2C$$

$$= \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)\left(\frac{2z}{1-z^2}\right)$$

$$= \frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

逐步推演，都是题中应有之义，显得多么自然、轻松，繁琐的计算一概可以省略了。

三角、代数、几何本有通家之好，“三教原来是一家”，做题时无论如何不要忘记啊。