3.2 常数立奇功

趣味数学的“趣”，一般都表现得比较含蓄、比较深邃、

比较高雅，不是那种肤浅、幼稚，画上大花脸就算有趣的。

现在请你来求下列组合数的平方和

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$$

解这道题，需要有点“悟性”。

先注意到下列二项展开式

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

类似地有

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=C_n^0+C_n^1\frac{1}{x}+C_n^2\left(\frac{1}{x^2}\right)+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

当这两个式子相乘时，显然右端常数项正好是

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$$

而左端却是

$$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$$

因此，所要求的和即是$\frac{1}{x^n}$ $(1+x)^{2n}$中的常数项，也就是，展开式 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 项的系数，那当然便是 C_{2n}^n，自属毫无疑问。

于是便得

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

可见这个组合恒等式的发现，常数是立下了汗马功劳的！此题并不容易，以上办法可说是最为方便的“终南捷径”了。