2.10 折纸与包络

把一张长方形纸片 ACDB 的一只角斜折，使 C 点老是落在对边 AB 上，这样做了许多次，那么所有这些折痕直线的包络便是一条抛物线（图 2-22）。

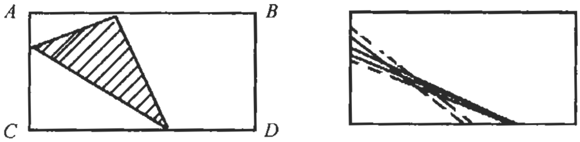

图 2-22

如果用一个圆形纸片，在这个圆片内任意取一个不是圆心的 A 点，然后把纸片折叠起来，不过在折的时候，要使翻转过来的圆弧都通过 A 点，折好一条折痕后，就把纸摊开来，这样反复地继续折下去……当折的次数足够多时椭圆就显露出来了。椭圆是这些折痕的包络（图 2-23）。

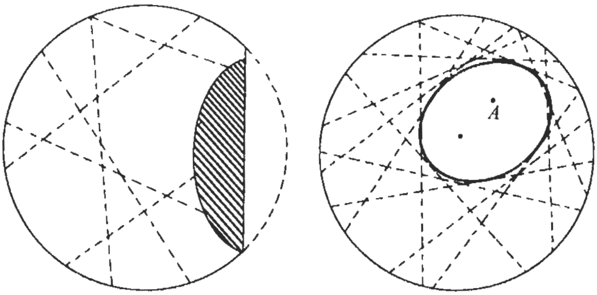

图 2-23

包络问题是数学的一个重要分支——微分几何的研究对象，它与生活中的许多实际问题有关。你在公园里总看到过喷水池吧，喷出来的水流，在同一个平面上往往形成一个曲线族，这些曲线可以近似地看作抛物线。在风景照片上，不难清楚地看出它们的包络（图 2-24）。

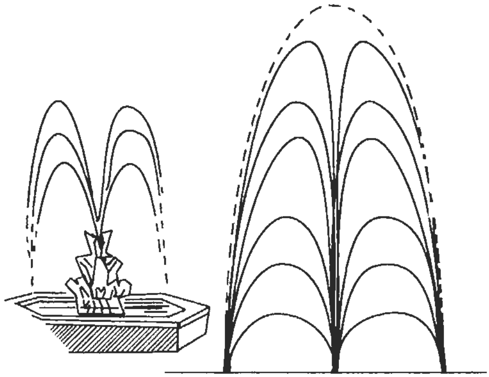

图 2-24

所谓包络（Envelope），是以某种方式与一族曲线相切的曲线。铁轨上滚动的车轮在不同时刻的位置构成一个圆心在一条直线上的等半径圆族，而铁轨与这族圆相切，所以铁轨就是这族圆的包络。

设平面上有一单参数曲线族$\{c_\lambda\}$，若存在一条曲线 Γ，它在每点均与$\{c_\lambda\}$中唯一的一条曲线相切，那么 Γ 就叫做单参数曲线族$\{c_\lambda\}$的包络。

设单参数曲线族$\{c_\lambda\}$位于 xy 平面上，其方程为

c_λ： $f(x,y;\lambda)=0$,这里的 λ 是参数。

如果$\{c_\lambda\}$的包络曲线 Γ 存在，则 Γ 的方程是

$$f(x,y;\lambda)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\lambda}f(x,y;\lambda)=0$$

显然，每条曲线是它自己的切线族的包络。

上述概念经推广之后，可进而讨论空间的包络面问题。

包络问题在工程上应用甚广，例如齿轮的啮合与传动奠基于平面上渐开线族的包络理论；铣床上铣刀的型面设计和轧钢设备中对轧棍的外形要求等都是空间曲线族包络理论的具体应用。

下面我们通过几个实际例子来看包络的求法。

例 1　设直线族为　$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，此处 α 为可变参数

$$f(x,y;\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

对 α 求偏导数

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,y;\alpha)=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0$$

从以上两式中消去 α，即得包络曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=p\cos\alpha\\ y=p\sin\alpha\end{cases}$$

由此转化为直角坐标方程，即得

$$x^2+y^2=p^2$$

可见包络是一个以原点为中心，半径为 p 的圆，如图2-25所示。

例 2　一线段具有定长 a，它的两个端点在直角坐标轴上滑动，并由此构成一曲线族，试求其包络。

如图 2-26 所示，当线段 AB 在坐标轴上滑动时，α 与 p 都在变动，但 p 可以表为 α 的函数。

设 $AB=a$（定长），则 $AO=AB\cos\alpha=a\cos\alpha$，而

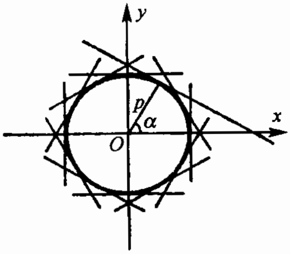

图 2-25

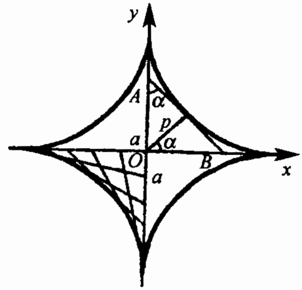

图 2-26

$$p = AO\sin\alpha = a\sin\alpha\cos\alpha$$

代入后，即得

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - a\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

此处 α 为可变参数。对 α 求偏导数，便得

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha + a\sin^2\alpha - a\cos^2\alpha = 0$$

从以上两式中解出

$$\begin{cases} x = a\sin^3\alpha \\ y = a\cos^3\alpha \end{cases}$$

于是

$$x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\sin^2\alpha$$

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\cos^2\alpha$$

最后就得出 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$。

包络曲线称为四尖内摆线（hypocycloid of four cusps），见图 2-26。

例 3 一族椭圆，其长轴与短轴分别位于互相垂直的两条直线上，而且椭圆的面积保持恒定，求此椭圆族的包络。

设椭圆族的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.1}$$

此处 a，b 均为可变参数，但

$$\pi ab = k \tag{2.2}$$

由（2.1）和（2.2）两式分别求全微分，即得

$$\frac{x^2\,da}{a^3} + \frac{y^2\,db}{b^3} = 0$$

$$b\,da + a\,db = 0$$

从而有 $$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

并且 $$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

于是 $$a = \pm x\sqrt{2}, \quad b = \pm y\sqrt{2}$$

代入 $\pi ab = k$ 中，即得 $xy = \frac{k}{2\pi}$ 及 $xy = -\frac{k}{2\pi}$

所以包络曲线为一对共轭双曲线（conjugate hyperbola）（图 2-27）。

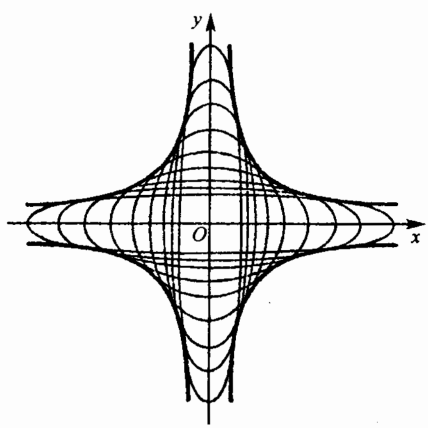

图 2-27