2.8 用复数找宝

虚数闯进数学领地之后，足足有几个世纪之久，一直披着一张神秘的、不可思议的面纱。直到两个业余数学爱好者给虚数作出了几何解释以后，面纱才被揭去。这两个有功之人是：测绘员威塞尔，挪威人；会计师阿尔刚，法国巴黎人。

按照他们的解释，一个复数，例如 $3+4i$，可以像图 2-17 那样地标出来，其中 3 是水平方向的坐标，4 是垂直方向的坐标。

所有的实数都对应于横轴上的点；而纯虚数则对应于纵轴上的点。当实数 3 乘以虚数单位 i 时，就将得到位于纵轴上的纯虚数 3i。由此可见，一个数乘以 i，在几何上就相当于逆时针旋转 90°。

这个规则同样适用于复数，把 $3+4i$ 乘以 i，得到

$$i(3+4i)=3i+4i^2=3i-4=-4+3i$$

从图 2-17 立即可以看出，$-4+3i$ 正好相当于 $3+4i$ 这个点绕原点按逆时针方向旋转了 90°。同样的道理，一个数乘上 $-i$ 就是它绕原点按顺时针方向旋转了 90°。

从前，有一位富于冒险精神的青年，在他曾祖父的遗物中发现了一张羊皮纸，上面写着一些刺激眼球的语句：

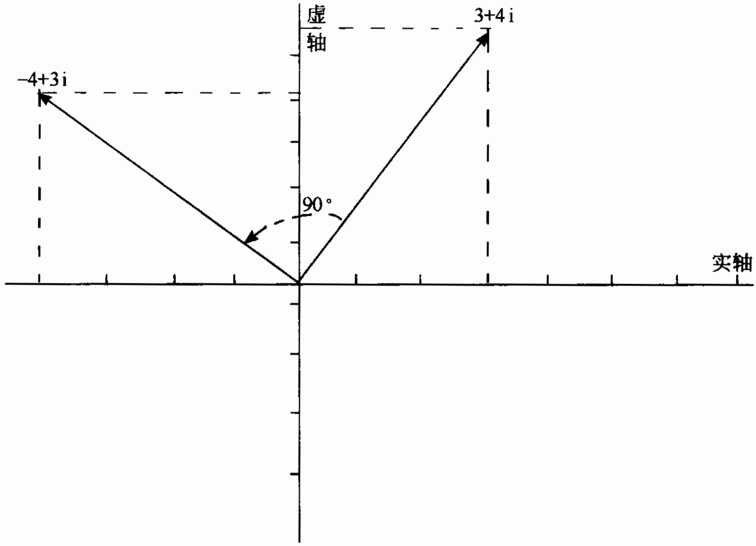

图 2-17

乘船至北纬__?°?′__，西经__?°?′__，即可找到一座荒无人烟的小岛。岛的北岸有一大片草地。草地上有一株橡树和一株松树。还有一座绞架，那是我们以前用来吊死叛徒的。从绞架走到橡树，记住走了多少步；到了橡树后向右拐个直角，再走同样的步数，在这里打个桩。然后回到绞架，朝松树走去，也记住所走的步数；走到松树后向左拐个直角，再走同样的步数后，在这里也打个桩。在两个桩的正当中挖掘下去，就可以找到宝藏。

羊皮纸上的叙述非常清楚、明白，说得头头是道，于是这位青年就去租了一条船开往目的地。果然发现了荒岛，也找到了岛上的橡树和松树，但使他大失所望的是：绞架无影无踪，不知去向。原来，经过长时间的风吹、日晒、雨淋，绞架已经

朽烂成土，一点痕迹都看不出来了。

年轻的冒险家陷入绝望。在狂乱中，他在地上乱掘起来。但是，地方太大了，一切努力只是徒劳。他只好两手空空，启帆回程，一文钱都未捞到，反而亏蚀了路费。

这是一个令人伤心的故事。然而，更令人伤心的是，倘若这个小伙子懂点复数，他本来是有可能找到他曾祖父埋下的宝藏的。现在让我们来为他找找看，尽管为时已晚，于他无补了。

我们把这个荒岛看成复数平面。通过两棵树干画一条轴线（实轴），再过两棵树之间的中点与实轴垂直作虚轴（图2-18），并以两树距离之半作为长度单位。这样一来，橡树位于实轴的 -1 点上，松树则在 $+1$ 点上。我们不知道绞架在何处，不妨用大写的希腊字母 Γ（它的样子倒是很像绞架*！）表示它的假设位置。这个位置不一定在两根轴上，因此，Γ 应该是个复数，即 $\Gamma=a+bi$。

由于绞架在 Γ，橡树在 -1，于是两者的距离与方位就是 $-1-\Gamma$。同理，绞架与松树相距 $1-\Gamma$。把这两个距离分别按顺时针与逆时针方向旋转 90°，也就是分别乘以 $-i$ 和 i，这就得出了两根桩的位置为

$$(-i)[-(1+\Gamma)]+1=i(\Gamma+1)+1$$
$$i(1-\Gamma)-1$$

宝藏在两根桩的正中间，因此，我们应该求出上述两个复数之和的一半，即

$$\frac{1}{2}[i(\Gamma+1)+1+i(1-\Gamma)-1]=\frac{1}{2}(2i)=i$$

* 作者注：绞架的英语为 gallows，英文字母 g 即由希腊字母 Γ 演变而来。

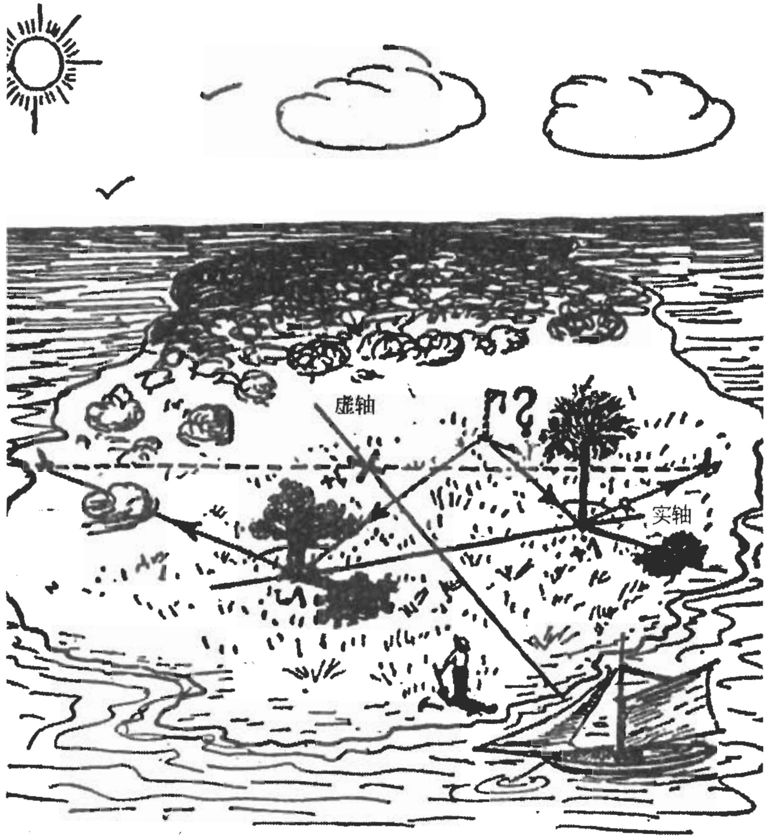

图 2-18

现在可以看出，Γ 所代表的绞架位置已在运算过程中自然消失了。由此可见：不论绞架位于何处，宝藏都在 i 这个点上。

倘若这位青年能做一点点数学运算，那么他就无须在整个荒岛上挖来挖去，他只要在图中打“×”处一挖，就可以把珍宝弄到手了。

本题当然还有其他解法，但都比不上复数方法的简洁省事。首先想出这个方法而形诸于文字的人是美国作家爱德华·卡斯纳(Edward Kasner)与詹姆士·纽曼（James Newman)，其后广泛为人征引，成为趣味数学领域中一道极其有名的经典名题。