2.5 切蛋糕的学问

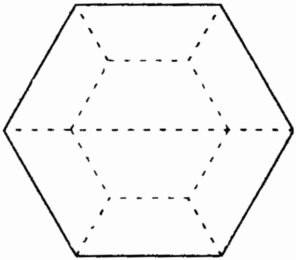

图 2-11

星期六是小明的 11 岁生日。那天他家来了八个亲朋好友，他父母拿出一块正六边形的蛋糕款待宾客，用刀子将蛋糕分别切割成相等的 8 份（图 2-11）它们不但面积相等，而且形状也完全一样，由于蛋糕的厚度处处均匀，这就意味着分割出来的八块蛋糕恰到好处，能使人人满意。

正当大家异口同声地称赞主人的绝活时，站在旁边的儿子小明却说："爸爸，你刚才分蛋糕时，一共切了十一刀，对不对？依我看，你的办法还可以改进，只切五刀也能平分成八份的。"

"恐怕不行吧？"小明父亲很惊讶，反问道："你能保证切出来的各块蛋糕不但截面积相等，而且连形状也一样吗？"

"当然如此。"小明满怀信心地回答。

"好吧！让你来试试。"小明父亲高兴地把刀递给了小明。

小明接过了小刀，在蛋糕上比划了一下，不慌不忙地把蛋糕切割成相等的八块。各位客人无不拍手叫好。

小明的切割方法如图 2-12 所示。但他切出来的蛋糕真的能满足要求吗？

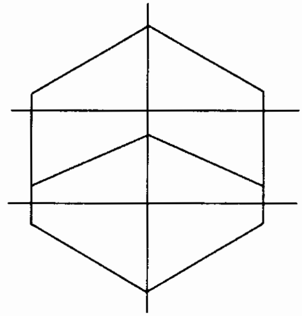

图 2-12

让我们来证明一下。设正六边形每边的长度为 a，从正六边形中心向六个顶点作联线，可将六边形分成六个全等的正三角形，由于

$$S_{\text{正三角形}} = \frac{1}{2}a^2 \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

于是

$$S_{\text{正六边形}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

切割成八块蛋糕后，则每块蛋糕的截面积为

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \times \frac{1}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$$

从图 2-11 可以看出，每块蛋糕的形状都是等腰梯形，于是，由梯形面积公式得

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{2} + a\right) \times \frac{\sqrt{3}}{4}a\right] = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$$

同上面的结果是完全吻合的。

小明的切法确实奇妙，真的只要五刀就行，纵切一刀，横切两刀，斜切两刀，非常对称。至于切出来的 8 块，不是等腰梯形，而是直角梯形了。

设其时梯形的上底为 x，下底为 y，由图 2-12 可知 $x+y=\frac{3}{4}a$，于是按配分比知识，上底之长应为$\frac{3}{4}a\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}a$，而下底之长应为$\frac{3}{4}a\times\frac{4}{5}=\frac{12}{20}a$。

然后再次应用梯形面积公式，便能得出

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{3a}{20}+\frac{12a}{20}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]\div 2\\
=&\left(\frac{15}{20}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\div 2\\
=&\frac{3\sqrt{3}}{8}a^{2}\div 2\\
=&\frac{3\sqrt{3}}{16}a^{2}
\end{aligned}
$$

这就表明，小明的神奇切法是完全能够满足要求的！